A.S. FEDENKO

RECUEIL D'EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

AVANT-PROPOS

Le présent recueil renferme plus de 1000 exercices portant sur les principaux chapitres du cours de géométrie différentielle lu dans les facultés de physique et de mathématiques. Dans cette édition les auteurs se sont efforcés de tenir compte des modifications qui s'opèrent actuellement dans l'enseignement des mathématiques.

La refonte des programmes de mathématiques du secondaire s'est répercutée sur le style d'enseignement, la terminologie et les notations. Dans cet ouvrage, les auteurs ont essayé d'asseoir et de développer ces innovations, se sont servis sans restriction de tous les termes et notations en usage dans le secondaire. Ils ont attaché une importance particulière à la définition rigoureuse des principaux objets étudiés dans le cours de géométrie différentielle. La courbe (ligne) est définie d'une part comme une classe de chemins paramétrés équivalents, de l'autre, comme une variété à une dimension. La surface est traitée comme une variété à deux dimensions et définie par une représentation paramétrique. La plupart des exercices sont résolus localement, c'est-à-dire que les figures géométriques sont considérées au voisinage d'un point fixe.

Les auteurs ont tenté dans leur exposé de faire la jonction entre la géométrie différentielle et les autres disciplines mathématiques. Ils ont fait un large usage de l'algèbre linéaire, de l'analyse mathématique et des équations différentielles, sans perdre pour autant le contact avec la géométrie du secondaire.

Cet ouvrage peut être recommandé à titre de manuel pour les facultés de physique et de mathématiques des universités et instituts pédagogiques.

Les auteurs

I. BELKO
A. FEDENKO
A. GOUSSAK
A. NAKHIMOVSKAÏA
A. RIABOUCHKO
L. TOUTAÏEV
V. VEDERNIKOV
V. VODNEV

RECUEIL D'EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Sous la direction de A. FEDENKO

TABLE DES MATIÈRES

PROLOGUE

Application

Soient X et Y des ensembles non vides. Si à tout élément de l'ensemble X on associe un élément de l'ensemble Y, on dit qu'on définit une *application* de l'ensemble X dans l'ensemble Y. Si cette application est désignée par f, on note

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto f(x). \tag{1}$$

L'élément $y = f(x)$ s'appelle *image de l'élément* x. Si $A \subset X$, l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

s'appelle *image de l'ensemble* A. L'ensemble $f(X)$ s'appelle *image de l'application* f.

Si $f(X) = Y$, on dit que f est une *application de l'ensemble* X *sur l'ensemble* Y ou que f est une *surjection*. L'application f est une *injection* si

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Une application f, qui est à la fois surjection et injection, est une *bijection*. On dit de la bijection qu'elle établit une *correspondance biunivoque* entre les éléments des ensembles X et Y. La bijection f admet une *application réciproque*:

$$f^{-1}\colon Y \to X, \quad f(x) \mapsto x$$

qui est également une bijection.

Si $A \subset X$, on peut envisager la *restriction de l'application* (1) à A :

$$f|_A\colon A \to Y,\ a \mapsto f(a), \text{ où } a \in A.$$

L'application (1) s'appelle *fonction* si Y est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des applications. On peut définir alors l'application

$$g \cdot f\colon X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)),$$

appelée *composée des applications* f et g.

Le *produit direct* (ou *cartésien*) de deux ensembles X et Y est l'ensemble

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

de tous les couples (x, y), où $x \in X$, $y \in Y$.

L'espace $\mathbb{R}^n$

L'ensemble

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

de toutes les collections ordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n nombres réels peut être muni de diverses structures. $\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel réel de dimension n*. Ses éléments seront donc appelés *vecteurs* et désignés par les lettres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, ... La base de $\mathbb{R}^n$ formée avec les vecteurs

$$\boldsymbol{i}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \boldsymbol{i}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ \boldsymbol{i}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

est dite *canonique*. On désignera par $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On peut considérer l'espace $\mathbb{R}^n$ comme un espace affine de points lié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, les éléments de $\mathbb{R}^n$ peuvent être traités soit comme des *points* et désignés par M, N, ..., soit comme des vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$, ...

Dans la base canonique les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le point A $(x_1, \ldots, x_n)$ possède les mêmes coordonnées affines par rapport au *repère* $(O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$, où $O = (0, 0, \ldots, 0)$ est l'origine des coordonnées.

Si à deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de l'espace $\mathbb{R}^n$ on associe le nombre

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

appelé *produit scalaire des vecteurs* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$, on fait de $\mathbb{R}^n$ un *espace euclidien de dimension n*. On munit cet espace d'*une distance entre les points* $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $N = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en posant

$$|MN| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

En particulier, le plan et l'espace, étudiés dans le secondaire, peuvent être identifiés à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ respectivement, rapportés à un système de coordonnées cartésiennes.

On appelle *boule de rayon* $\varepsilon > 0$ *et de centre* A l'ensemble

$$B(A, \varepsilon) = \{ M \in \mathbb{R}^n \mid |AM| < \varepsilon \}.$$

Cette boule s'appelle *ε-voisinage du point A*.

Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est un *ensemble ouvert* si avec tout point A il contient une boule de centre A. Tout ensemble ouvert contenant un point A s'appelle *voisinage* de ce point.

Un point $A \in \mathbb{R}^n$ est un *point d'adhérence* d'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ si tout voisinage de ce point contient au moins un point de U. L'ensemble de tous les points d'adhérence de U s'appelle *adhérence* de U et se note $\bar{U}$. Un ensemble U est *fermé si* $\bar{U} = U$.

On dit qu'un ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est *connexe* s'il n'existe pas d'ensembles U_1 et U_2 ouverts disjoints partageant l'ensemble V en deux sous-ensembles non vides V_1 et V_2 tels que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$. Un ensemble ouvert et connexe s'appelle *domaine*. L'adhérence d'un domaine s'appelle *domaine fermé*.

On dit qu'un point d'un ensemble U est *intérieur* s'il appartient à U avec l'un de ses voisinages. L'ensemble de tous les points intérieurs de l'ensemble U s'appelle *intérieur* de U.

Un point $M \in \mathbb{R}^n$ est un *point frontière* d'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ si chacun de ses voisinages contient des points qui appartiennent et des points qui n'appartiennent pas à U. L'ensemble des points frontières de U s'appelle *frontière* de U et se note ∂U.

On appelle *figure* Φ dans l'espace $\mathbb{R}^n$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle *équations de la figure* Φ les équations en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiées par les points de $\mathbb{R}^n$ qui appartiennent à Φ et par eux seuls. Soient $l: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire, $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, $('\boldsymbol{i}_1, '\boldsymbol{i}_2, \ldots, '\boldsymbol{i}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $l(\boldsymbol{i}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}'\boldsymbol{i}_j$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. La matrice

$$(\alpha_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant m}}$$

dont les colonnes sont formées avec les coordonnées des vecteurs $l(\boldsymbol{i}_k)$ s'appelle *matrice de l'application linéaire* l. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ et $l(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} x_k.$$

Deux bases $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m) = [\boldsymbol{e}]$ et $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = [\boldsymbol{a}]$ d'un espace vectoriel V de dimension m sont *équivalentes* si le déterminant de la matrice de passage de la base $[\boldsymbol{e}]$ à la base $[\boldsymbol{a}]$ (c'est-à-dire la matrice de l'application linéaire de l'espace V qui envoie la base $[\boldsymbol{e}]$ dans la base $[\boldsymbol{a}]$) est positif. La classe des bases équivalentes de l'espace V s'appelle *orientation* de V. Dans tout espace vectoriel il n'existe que deux orientations: l'*orientation positive* et l'*orientation négative*. Choisir l'une d'elles revient à choisir une base dans cet espace.

Si V est un sous-espace de dimension deux dans $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2) une base de V, m un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à V, alors (e_1, e_2, m) est une base de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur m étant choisi on dit que la base (e_1, e_2) est *positive* si la base (e_1, e_2, m) est équivalente à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc, la donnée de l'orientation de V équivaut à la donnée du vecteur m qui, souvent, est choisi orthogonal à V et unitaire.

On appelle *forme linéaire* sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ une application linéaire $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $\alpha(i_k) = \alpha_k$. Pour le vecteur $h = (h_1, \ldots, h_n)$ on a alors

$$\alpha(h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k.$$

Comme exemples de formes linéaires, on a les *fonctions coordonnées*

$$u_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto u_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On appelle *forme bilinéaire* sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ une application $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes:

$$\beta(h_1 + h_2, p) = \beta(h_1, p) + \beta(h_2, p),$$
$$\beta(\lambda h, p) = \lambda\beta(h, p),$$
$$\beta(h, p_1 + p_2) = \beta(h, p_1) + \beta(h, p_2),$$
$$\beta(h, \lambda p) = \lambda\beta(h, p).$$

Si $\beta(i_k, i_l) = \beta_{kl}$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, alors

$$\beta(h, p) = \sum_{k, l=1}^{n} \beta_{kl} h_k p_l.$$

La forme bilinéaire β est *symétrique* si $\beta(h, p) = \beta(p, h)$ et *antisymétrique* (ou une *2-forme*) si $\beta(h, p) = -\beta(p, h)$. On a $\beta_{kl} = \beta_{lk}$ pour une forme bilinéaire symétrique et $\beta_{kl} = -\beta_{lk}$ pour une forme antisymétrique. Une application $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une *forme quadratique* sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ s'il existe une forme bilinéaire symétrique β telle que $q(h) = \beta(h, h)$. En coordonnées, $q(h)$ s'exprime par la formule suivante:

$$q(h) = \sum_{k, l=1}^{n} \beta_{kl} h_k h_l.$$

La forme quadratique q est dite *associée* à la forme bilinéaire β. Soient α et β deux formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On appelle *produit extérieur* de ces formes la 2-forme

$$\alpha \wedge \beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

définie comme suit:

$$(\alpha \wedge \beta)(h, p) = \frac{1}{2}(\alpha(h)\beta(p) - \alpha(p)\beta(h)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha(h) & \alpha(p) \\ \beta(h) & \beta(p) \end{vmatrix}.$$

Soit M un point arbitraire de l'espace $\mathbb{R}^3$. On appelle *vecteur tangent* à $\mathbb{R}^3$ en M le couple $(M, \boldsymbol{h})$, où $\boldsymbol{h}$ est un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur tangent $(M, \boldsymbol{h})$ peut être représenté par un couple de points ordonné (M, N) tel que le vecteur qui lui est associé soit confondu avec $\boldsymbol{h}$ (c'est-à-dire que $M + \boldsymbol{h} = N$), ainsi que par un vecteur $\boldsymbol{h}$ d'origine M. L'ensemble $T_M\mathbb{R}^3 = \{(M, \boldsymbol{h}) \mid \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^3\}$ de tous les vecteurs tangents à $\mathbb{R}^3$ en M s'appelle *espace vectoriel tangent*. Les opérations sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ se transposent aux vecteurs tangents en un même point de la manière suivante:

$$(M, \boldsymbol{h}) + (M, \boldsymbol{p}) = (M, \boldsymbol{h} + \boldsymbol{p}),$$
$$\alpha (M, \boldsymbol{h}) = (M, \alpha \boldsymbol{h}),$$
$$(M, \boldsymbol{h}) \cdot (M, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{p}.$$

L'espace $T_M\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel euclidien pour ces opérations et les vecteurs $(M, \boldsymbol{i})$, $(M, \boldsymbol{j})$ et $(M, \boldsymbol{k})$ constituent une base orthonormale. Si le point de tangence M est connu, on peut désigner le vecteur tangent $(M, \boldsymbol{h})$ simplement par $\boldsymbol{h}$.

La donnée en chaque point de $\mathbb{R}^3$ (ou d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$) d'un vecteur tangent à $\mathbb{R}^3$ définit un champ *de vecteurs* sur $\mathbb{R}^3$ (ou sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$).

Fonction vectorielle

Soit U un ensemble de points dans un espace $\mathbb{R}^m$. L'application

$$\boldsymbol{r}\colon U \to \mathbb{R}^n \tag{2}$$

qui à tout point $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U$ associe le vecteur $\boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^n$ s'appelle *fonction vectorielle de m variables scalaires*. La donnée d'une fonction vectorielle équivaut à la donnée de n fonctions scalaires dites ses *composantes*:

$$\boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_m)).$$

Supposons qu'une fonction vectorielle $\boldsymbol{r}$ est définie en un voisinage d'un point $M_0 \in \mathbb{R}^m$, sauf peut-être en ce point, et soit $\boldsymbol{a}$ un vecteur arbitraire fixe. On dit que le vecteur $\boldsymbol{a}$ est *limite* de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}$ et on note $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{M \to M_0} \boldsymbol{r}(M)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$0 < |MM_0| < \delta \Rightarrow |\boldsymbol{r}(M) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

La fonction vectorielle (2) définie au voisinage du point M_0 est dite *continue* en ce point si

$$\lim_{M \to M_0} \boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{r}(M_0).$$

Dans le cas général, la fonction vectorielle (2) est dite *continue* en un point $M_0 \in U$ si pour tout voisinage W dans $\mathbb{R}^n$ du point $r(M_0)$ il existe un voisinage V dans $\mathbb{R}^m$ du point M_0 tel que $r(V \cap U) \subset W$. Une application $r: U \to V$, où U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ et V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, s'appelle *homéomorphisme* si elle est bijective et si r est continue avec son inverse r^{-1}.

Considérons une fonction vectorielle $r = r(t)$ définie sur un ensemble ouvert de la droite $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction vectorielle d'une seule variable réelle t. Si cette fonction est définie en un point t_0, alors la limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t},$$

si elle existe, s'appelle *dérivée* en t_0 de r et se note $r'(t_0)$ ou $\frac{dr}{dt}(t_0)$. On voit donc apparaître une fonction vectorielle r' : nous l'appellerons *dérivée de la fonction vectorielle* r. La dérivée de la fonction r' s'appelle *dérivée seconde* de r. On appelle *dérivée* $r^{(k)}$ *d'ordre* k de la fonction vectorielle r la dérivée de la fonction $r^{(k-1)}$. Si une fonction possède une dérivée continue d'ordre k, on dit qu'elle *appartient à la classe* C^k. On dit qu'*une fonction est de classe* C^∞ si elle possède des dérivées de tout ordre. Les fonctions de classe C^k sont dites *indéfiniment différentiables* ou *lisses*. La dérivée $r'(t_0)$ de la fonction $r(t)$ peut être assimilée à une application linéaire $r'(t_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ qui à tout $\tau \in \mathbb{R}$ associe le vecteur $\tau r'(t_0)$. Cette application vérifie l'égalité

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0+\Delta t)-r(t_0)-\Delta t\, r'(t_0)|}{|\Delta t|} = 0.$$

L'application linéaire $r'(t_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est souvent appelée *différentielle* et notée $dr_{t_0} = r'(t_0)\,dt$.

Une fonction vectorielle $r = r(t)$ définie sur un intervalle $J = [\alpha, \beta]$ est dite *lisse* s'il existe une fonction vectorielle lisse $\rho = \rho(t)$ définie sur un intervalle $I =]a, b[$ contenant J, telle que $\rho|_J = r$.

Toute fonction vectorielle r d'une variable réelle de classe C^k est justiciable de la *formule de Taylor*

$$r(t+\Delta t) = r(t) + \Delta t\, r'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} r''(t) + \dots$$
$$\dots + \frac{(\Delta t)^k}{k!}\left(r^{(k)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)\right),$$

où $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(t, \Delta t) = 0$.

Soit maintenant une fonction vectorielle (2) des variables u, v, définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles de cette

fonction en (u_0, v_0) se définissent comme suit:

$$\partial_u \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(u_0+h, v_0) - \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{h},$$

$$\partial_v \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(u_0, v_0+h) - \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{h},$$

$$\partial_{uu}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{uu} = \partial_u(\boldsymbol{r}_u), \quad \partial_{vv}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{vv} = \partial_v(\boldsymbol{r}_v),$$

$$\partial_{uv}\boldsymbol{r} = \partial_{vu}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{r}_{vu} = \partial_u(\boldsymbol{r}_v) = \partial_v(\boldsymbol{r}_u).$$

On dit qu'une fonction vectorielle $\boldsymbol{r}: U \to \mathbb{R}^n$, $(u, v) \to \boldsymbol{r}(u, v)$, où U est un domaine de $\mathbb{R}^2$, est *différentiable* en un point $M_0 \in U$ s'il existe une application linéaire $l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|\boldsymbol{r}(M_0+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{r}(M_0) - l(\boldsymbol{h})|}{|\boldsymbol{h}|} = 0.$$

Une fonction vectorielle différentiable en un point M_0 sera continue en ce point et l'application linéaire $l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, unique. On l'appelle *différentielle* (ou *dérivée*) de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}$ en M_0 et on la note $d\boldsymbol{r}_{M_0}$. On peut représenter la différentielle $d\boldsymbol{r}_{M_0}$ sous forme d'une application de $T_{M_0}\mathbb{R}^2$ dans $T_{r(M_0)}\mathbb{R}^n$ en identifiant le vecteur $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ au vecteur $(M_0, \boldsymbol{h})$ tangent à $\mathbb{R}^2$ en M_0, et le vecteur $d\boldsymbol{r}_{M_0}(\boldsymbol{h}) = l(\boldsymbol{h}) \in \mathbb{R}^n$, au vecteur $(\boldsymbol{r}(M_0), d\boldsymbol{r}_{M_0}(\boldsymbol{h}))$ tangent à $\mathbb{R}^n$ au point $\boldsymbol{r}(M_0)$. Si la fonction vectorielle $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ vérifie les conditions $\boldsymbol{\rho}(t_0) = M_0$, $\boldsymbol{\rho}'(t_0) = \boldsymbol{h}$, alors le vecteur $d\boldsymbol{r}_{M_0}(\boldsymbol{h})$ est confondu avec la dérivée $(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{\rho})'(t_0)$ de la fonction vectorielle $(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{\rho})$. On dit qu'une fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ est *différentiable* si elle l'est en tout point de U. Les coordonnées u et v peuvent être traitées comme des fonctions sur U, soit $u: (u, v) \mapsto u$, $v: (u, v) \mapsto v$. Ces fonctions seront différentiables et leurs différentielles du et dv associent au vecteur tangent $(M, \boldsymbol{h})$, où $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$, les nombres h_1 et h_2 respectivement, c'est-à-dire que $du_M(\boldsymbol{h}) = h_1$, $dv_M(\boldsymbol{h}) = h_2$. Avec cette représentation de du et dv on a

$$d\boldsymbol{r} = \partial_u \boldsymbol{r}\, du + \partial_v \boldsymbol{r}\, dv.$$

Pour le vecteur tangent $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ on a

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h}) = \partial_u \boldsymbol{r}\, du(\boldsymbol{h}) + \partial_v \boldsymbol{r}\, dv(\boldsymbol{h}) = \partial_u \boldsymbol{r} h_1 + \partial_v \boldsymbol{r} h_2.$$

Si $\boldsymbol{r}(u, v) = (f_1(u, v), \ldots, f_n(u, v))$ et $M_0 = (u_0, v_0)$, alors la différentielle $d\boldsymbol{r}_{M_0}$ est définie par la *matrice de Jacobi*

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_1(u_0, v_0) \\ \partial_u f_2(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0) \\ \cdots & \cdots \\ \partial_u f_n(u_0, v_0) & \partial_v f_n(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

L'espace $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ peut être identifié à l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ par la donnée d'une application linéaire par sa matrice. Pour la fonction vectorielle différentiable

$r = r(u, v)$ on obtient alors la fonction vectorielle $dr: U \to \mathbb{R}^{2n}$. La différentielle de la fonction vectorielle dr en M s'appelle *différentielle seconde* de la fonction vectorielle r au point M et se note d^2r_M. Une fonction vectorielle $r = r(u, v)$ est dite *deux fois différentiable* si d^2r existe en tout point de U ; *continûment différentiable* (ou *de classe* C^1) si dr est continue ; *de classe* C^2 si d^2r est continue. De façon analogue, on définit de proche en proche les différentielles d'ordre k et les *fonctions vectorielles de classe* C^k qui seront appelées *lisses* pour abréger. L'application linéaire

$$d^2r_M : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n), \quad h \mapsto d^2r_M(h)$$

peut être identifiée à l'application bilinéaire de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$, notée aussi d^2r_M, par la règle

$$d^2r_M(h, p) = d^2r_M(h)(p).$$

L'application bilinéaire d^2r_M est symétrique et la forme quadratique correspondante est souvent notée

$$d^2r = \partial_{uu}r\, du^2 + 2\partial_{uv}r\, du\, dv + \partial_{vv}r\, dv^2.$$

Soient U et V des domaines de $\mathbb{R}^n$. L'application $f: U \to V$ est un *difféomorphisme de classe* C^k si f est bijective et appartient à la classe C^k avec son inverse f^{-1}.

Courbe et ligne

Soit I un intervalle ouvert, semi-ouvert ou fermé de la droite $\mathbb{R}$. On appelle *chemin* (ou *courbe paramétrée*) *de classe* C^k dans l'espace $\mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle $r: I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^k que l'on note (I, r). Un chemin (I, r) est

1) *simple* si l'application r est injective ;
2) *régulier* si pour tout point intérieur $t_0 \in I$

$$r'(t_0) \neq \mathbf{o};$$

3) *birégulier* si pour tout point intérieur $t_0 \in I$

$$r'(t_0) \nparallel r''(t_0).$$

On dit que deux chemins $(I, r = r(t))$ et $(J, \rho = \rho(s))$ de classe C^k, où I et J sont des intervalles, sont *équivalents* s'il existe un difféomorphisme $\lambda: I \to J$ de classe C^k tel que $r(t) = \rho(\lambda(t))$. Les classes de chemins équivalents (de courbes paramétrées) sont appelées *courbes*, et tout chemin de cette classe *représentation paramétrique de la courbe*. Une fonction $\lambda: I \to J$ définissant l'équivalence de deux chemins s'appelle *changement de paramètre*. Si (I, r) est un chemin, alors l'ensemble $r(I) \subset \mathbb{R}^3$ s'appelle *image de ce chemin*. Tous les chemins équivalents qui forment une courbe ont la même image appelée *image de cette courbe*. L'image d'une courbe est sou-

vent appelée courbe, bien que des courbes différentes puissent avoir la même image. On dit qu'une courbe est *plane* si son image est contenue dans un plan. On dit qu'une courbe est *simple* (resp. *régulière*, *birégulière*) si elle admet une représentation paramétrique simple (resp. régulière, birégulière).

Soit donné un chemin $r = r(t)$. Considérons tous les chemins équivalents obtenus par le changement de paramètre $s = \lambda(t)$ avec $\lambda'(t) > 0$. La classe de ces chemins s'appelle *courbe orientée*. La représentation paramétrique $r = r(s)$ d'une courbe est dite *intrinsèque* si $|r'(s)| \equiv 1$. Toute courbe régulière admet une représentation paramétrique intrinsèque. On appelle *paramètre naturel*, ou *intrinsèque*, et on le désigne généralement par s, la longueur d'un arc de courbe, mesurée à partir d'une origine et précédée du signe $+$ ou du signe $-$. Un sous-ensemble l de $\mathbb{R}^3$ est une *ligne* (ou une *variété à une dimension*) *de classe* C^k si pour tout point $M \in l$ il existe un voisinage W de M dans $\mathbb{R}^3$ et un chemin régulier (I, r) de classe C^k, tels que

$$r(I) = W \cap l \text{ et } r\colon I \to W \cap l \text{ est un homéomorphisme.}$$

Le chemin (I, r) s'appelle *représentation paramétrique de la ligne* l. Une ligne l s'appelle *élémentaire* si une des représentations paramétriques (I, r) est telle que $r(I) = l$. Si (I, r) et (J, ρ) sont deux représentations paramétriques de la ligne l, alors les chemins (I, r) et (J, ρ) sont équivalents.

On dit qu'une ligne est *plane* si le sous-ensemble l est contenu dans un plan.

Soient M un point d'une ligne l, (I, r) une représentation paramétrique de l telle que $M = r(t)$. On appelle *tangente à la ligne* l au point M la droite qui passe par M et dont le vecteur directeur est $r'(t)$. On définit de façon analogue la tangente à une courbe et à un chemin. Soit $r = r(s)$ une représentation paramétrique intrinsèque d'une courbe (ou d'une ligne). Le vecteur $r''(s)$ s'appelle alors *vecteur de courbure* de la courbe (resp. de la ligne) en s et sa longueur $|r''(s)|$, *courbure* et se note $k(s)$ (ou k).

On appelle *plan osculateur* à une courbe birégulière (à une ligne) $\rho = \rho(t)$ en un point t_0 le plan qui passe par le point $\rho(t_0)$ et qui admet pour vecteurs directeurs les vecteurs $\rho'(t_0)$ et $\rho''(t_0)$.

Si $r = r(s)$ est la représentation paramétrique intrinsèque d'une courbe birégulière (d'une ligne), alors le vecteur $r''(s)$ est orthogonal à la tangente en s à la courbe. On appelle *cercle osculateur* à une courbe birégulière (à une ligne) en un point s de cette courbe (ligne) le cercle de rayon $1/k(s)$ contenu dans le plan osculateur et de centre le point

$$r(s) + \frac{1}{k^2(s)} r''(s).$$

On appelle *repère de Frenet* d'une courbe birégulière orientée (d'une ligne) $r = r(s)$ en un point s le repère orthonormal $(r(s); t(s), n(s),$

$\boldsymbol{b}(s)$), où $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$, $\boldsymbol{n}(s) \uparrow\uparrow \boldsymbol{r}''(s)$ et le triplet de vecteurs ($\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$) est direct.

Surface

On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^3$ est une *surface* (ou une *variété de dimension deux*) *de classe* C^k si pour tout point $A \in S$ il existe un voisinage W de ce point dans $\mathbb{R}^3$ et un couple $(U, \boldsymbol{r})$, où U est un domaine de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}: U \to \mathbb{R}^3$, vérifiant les conditions:

1) l'application $\boldsymbol{r}: U \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \boldsymbol{r}(u, v)$ appartient à la classe C^k;

2) $\boldsymbol{r}(U) = W \cap S$ et $\boldsymbol{r}: U \to W \cap S$ est un homéomorphisme;

3) pour tout point $(u, v) \in U$, les vecteurs $\partial_u \boldsymbol{r}(u, v)$ et $\partial_v \boldsymbol{r}(u, v)$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire que rang $d\boldsymbol{r}_{(u,v)} = 2$.

Le couple $(U, \boldsymbol{r})$ s'appelle *représentation paramétrique de la surface* S, les paramètres u et v, *coordonnées curvilignes* sur S. La surface S est dite *élémentaire* si elle possède une représentation paramétrique $(U, \boldsymbol{r})$ telle que $\boldsymbol{r}(U) = S$.

Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$ de classe C^k. Si $(U, \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de S, V un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda: V \to U$ un difféomorphisme de classe C^k, alors le couple $(V, \boldsymbol{r} \circ \lambda)$ est aussi une représentation paramétrique de S. D'autre part, si $(U_1, \boldsymbol{r}_1)$ et $(U_2, \boldsymbol{r}_2)$ sont deux représentations paramétriques de S telles que $\boldsymbol{r}_1(U_1) = \boldsymbol{r}_2(U_2)$, alors l'application $\lambda = \boldsymbol{r}_2^{-1} \circ \boldsymbol{r}_1: U_1 \to U_2$ est un difféomorphisme de classe C^k appelé *changement de représentation paramétrique*. L'application $\rho: I \to S$, où I est un intervalle de la droite, s'appelle *chemin* (*ligne*) *lisse sur la surface* S dans $\mathbb{R}^3$ si l'application $I \to \mathbb{R}\rho$ est lisse (resp. si $\rho(I)$ est une ligne de $\mathbb{R}^3$ et (I, ρ) sa représentation paramétrique). Soient $\rho: I \to S$ un chemin lisse (une ligne) sur une surface S, $(U, \boldsymbol{r})$ une représentation paramétrique de S et, de plus, $\rho(I) \subset \boldsymbol{r}(U)$. Alors, la fonction vectorielle lisse $\mu: I \to U$ telle que $\boldsymbol{r}(\mu(t)) \equiv \rho(t)$ s'appelle *donnée intrinsèque du chemin* (*de la ligne*), (I, μ) étant un chemin (resp. une ligne) du domaine U. Les lignes de la surface S dont les données intrinsèques sont de la forme $u = u_0 + t$, $v = v_0$ ou $u = u_0$, $v = v_0 + t$, s'appellent *lignes de coordonnées*. On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{h}$ tangent à $\mathbb{R}^3$ en un point M d'une surface S est un *vecteur tangent à la surface* S *en* M s'il existe sur S un chemin (I, ρ) tel que $\rho(t_0) = M$, $\rho'(t_0) = \boldsymbol{h}$. L'ensemble de tous les vecteurs tangents à la surface S en M est un sous-espace vectoriel bidimensionnel de $T_M\mathbb{R}^3$ noté T_MS et appelé *espace tangent en* M *à la surface* S. Si $M = \boldsymbol{r}(u, v)$, où $(U, \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de S, alors les vecteurs $\partial_u \boldsymbol{r}(u, v)$ et $\partial_v \boldsymbol{r}(u, v)$, qui seront désignés aussi par $\partial_u \boldsymbol{r}_M$ et $\partial_v \boldsymbol{r}_M$ respectivement, sont tangents aux lignes de coordonnées passant par le point M et forment une base de l'espace tangent T_MS. La base $(\partial_u \boldsymbol{r}, \partial_v \boldsymbol{r})$ s'appelle *base variable* sur S, de

plus $T_M S = dr_{(u, v)}(\mathbb{R}^2)$. Le plan de $\mathbb{R}^3$ passant par M et admettant $T_M S$ pour sous-espace directeur s'appelle *plan tangent* à S en M. La droite qui passe par M et qui est orthogonale au plan tangent s'appelle *normale* à la surface S en M. On appelle *champ de vecteurs* ξ sur une surface S (ou sur une partie $Q \subset S$) une application qui à tout point $M \in S$ (ou $M \in Q$) associe le vecteur ξ_M tangent à S en M. Comme exemples de champs de vecteurs sur $r(U) \subset S$, où (U, r) est une représentation paramétrique de S, citons les champs $\partial_u r$ et $\partial_v r$ qui sont appelés *champs de vecteurs de base.* On définit la somme de champs de vecteurs ξ et η et le produit d'un champ par une fonction f comme ceci :

$$(\xi + \eta)_M = \xi_M + \eta_M, \quad (f\xi)_M = f(M)\,\xi_M,$$

les opérations intervenant dans les seconds membres étant définies sur l'espace vectoriel $T_M S$. Si un champ de vecteurs ξ est défini sur une partie $r(U) \subset S$, on a alors la décomposition $\xi = \xi_1 \partial_u r + \xi_2 \partial_v r$, où ξ_1 et ξ_2 sont des fonctions définies sur $r(U)$ appelées *composantes du champ* ξ *par rapport à la base variable* $(\partial_u r, \partial_v r)$. Si le champ ξ est défini sur la surface S tout entière, ses composantes par rapport à la base variable $(\partial_u r, \partial_v r)$ s'appellent *composantes de la restriction du champ* ξ *au sous-ensemble* $r(U)$. Un champ de vecteurs ξ est dit *continu* si ses composantes par rapport à toute base variable sont des fonctions continues.

Orienter une surface S, c'est choisir une orientation dans chaque espace vectoriel tangent $T_M S$, ou ce qui revient au même, choisir un vecteur unitaire m_M orthogonal à $T_M S$ pour tous les $M \in S$. Une représentation paramétrique (U, r) d'une surface S est dite *compatible avec l'orientation* si la base mobile est orientée dans le sens direct en tous les points, c'est-à-dire si la base $(\partial_u r, \partial_v r, m)$ est équivalente à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'une orientation d'une surface S est *continue* si pour tout point M de S il existe une représentation paramétrique (U, r) compatible avec cette orientation et telle que $M \in r(U)$. On n'étudiera en principe que les orientations continues. Une surface est *orientée* si son orientation est continue.

On dit qu'une application $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ est *lisse* si pour toute représentation paramétrique (U, r) de S la fonction vectorielle $f \circ r\colon U \to \mathbb{R}^n$, définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^2$, est lisse. En particulier, pour $n = 1$ on obtient la définition d'une fonction lisse sur une surface. Soit Q une autre surface de $\mathbb{R}^3$. L'application $f\colon S \to Q$ peut être traitée aussi comme une application de S dans $\mathbb{R}^3$, vu que Q est une partie de $\mathbb{R}^3$. L'application $f\colon S \to Q$ s'appelle *lisse* si elle l'est en tant qu'application de S dans $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un champ de vecteurs ξ sur une surface S est *lisse* si ses composantes par rapport à toute base mobile sont des fonctions lisses. Les champs de vecteurs de base $\partial_u r$ et $\partial_v r$ sont lisses.

Soient $f: S \to Q$ une application lisse, $\rho = \rho(t)$ un chemin lisse sur S passant par $M = \rho(t_0)$. Alors $f \circ \rho = (f \circ \rho)(t)$ est un chemin lisse sur Q passant par le point $M' = f(M) = f \circ \rho(t_0)$. L'application de $T_M S$ dans $T_{M'} Q$, qui au vecteur tangent $\rho'(t_0)$ associe le vecteur tangent $(f \circ \rho)'(t_0)$, s'appelle *différentielle* (ou encore *application dérivée*) *de l'application f en M* et se note df_M. La différentielle $df_M: T_M S \to T_{M'} Q$ est une application linéaire.

CHAPITRE PREMIER

FONCTION VECTORIELLE. NOTION DE COURBE, DE LIGNE ET DE SURFACE

1. Montrer que les composantes de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ se calculent à l'aide de la formule

$$x_j(M) = \boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{r}(M) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n)$ est la base canonique de l'espace $\mathfrak{R}^n$.

2-6. Montrer que l'existence des limites

$$\lim_{M \to M_0} \boldsymbol{r}_i(M) = \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lambda$$

implique celle des limites et formules suivantes:

(2) $\lim\limits_{M \to M_0} (\boldsymbol{r}_1(M) \pm \boldsymbol{r}_2(M)) = \boldsymbol{a}_1 \pm \boldsymbol{a}_2.$

(3) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M)\, \boldsymbol{r}_1(M)) = \lambda \boldsymbol{a}_1.$

(4) $\lim\limits_{M \to M_0} (\boldsymbol{r}_1(M) \cdot \boldsymbol{r}_2(M)) = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2.$

(5) $\lim\limits_{M \to M_0} (\boldsymbol{r}_1(M) \times \boldsymbol{r}_2(M)) = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2.$

(6) $\lim\limits_{M \to M_0} (\boldsymbol{r}_1(M)\, \boldsymbol{r}_2(M)\, \boldsymbol{r}_3(M)) = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3.$

7. Montrer qu'il y a équivalence entre la continuité d'une fonction vectorielle et celle de ses composantes.

8. La continuité de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ implique-t-elle celle de la fonction $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}(M)|$? La réciproque est-elle vraie?

9-13. Montrer que la continuité de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}_i(M)$ et de la fonction $f(M)$ en M_0 entraîne celle en M_0 des fonctions suivantes:

(9) $\boldsymbol{r}_1(M) \pm \boldsymbol{r}_2(M).$ (10) $f(M)\, \boldsymbol{r}_1(M).$

(11) $\boldsymbol{r}_1(M) \cdot \boldsymbol{r}_2(M).$ (12) $\boldsymbol{r}_1(M) \times \boldsymbol{r}_2(M).$

(13) $\boldsymbol{r}_1(M)\, \boldsymbol{r}_2(M)\, \boldsymbol{r}_3(M).$

14. Montrer qu'il y a équivalence entre l'indéfinie différentiabilité d'une fonction vectorielle et celle de ses composantes.

15. Montrer que

$$r^{(k)}(t)=(x_1^{(k)}(t),\ x_2^{(k)}(t),\ \ldots,\ x_n^{(k)}(t)).$$

16-20. Montrer que pour des fonctions vectorielles $\boldsymbol{r}_i\colon I \to \mathbb{R}^3$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 on a les formules suivantes:

(16) $(\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \pm \boldsymbol{r}_2'$.

(17) $(f\boldsymbol{r})' = f'\boldsymbol{r} + f\boldsymbol{r}'$.

(18) $(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2'$.

(19) $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2'$.

(20) $(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)' = \boldsymbol{r}_1'\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2'\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3'$.

21-26. Trouver les dérivées des fonctions suivantes de la variable réelle t:

(21) $\boldsymbol{r}^2$. (22) $\boldsymbol{r}'^2$.

(23) $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''$. (24) $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}'''$.

(25) $(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}'''$. (26) $\sqrt{\boldsymbol{r}^2}$.

27. Montrer la propriété suivante de la tangente à une ellipse: la tangente à une ellipse en un point M est la bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs de M.

28. Soit la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 + 8,\ 4t - 7,\ t + 5)$. Trouver la valeur t_0 pour laquelle l'application linéaire $\boldsymbol{r}'(t_0)$ associe au nombre 2 le vecteur (4, 8, 2).

29. L'indéfinie différentiabilité de la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ entraîne-t-elle celle de la fonction $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}(t)|$?

30. Etant donnée une fonction $\boldsymbol{r}(t)$, peut-on affirmer que

a) $|\boldsymbol{r}'| = |\boldsymbol{r}|'$? b) $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{r}'|$?

31. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ possède une dérivée nulle sur un intervalle est que le vecteur $\boldsymbol{r}(t)$ soit constant, c'est-à-dire ne dépende pas de t.

32. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\boldsymbol{r}(t)$ et $\boldsymbol{r}'(t)$ soient orthogonaux en tous les points d'un intervalle est que $|\boldsymbol{r}(t)| = \text{const}$.

33. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ une fonction vectorielle de classe C^1, $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{0}$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\boldsymbol{r}(t)$ soit de direction constante est que les vecteurs $\boldsymbol{r}(t)$ et $\boldsymbol{r}'(t)$ soient colinéaires dans le domaine de variation de t.

34. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ une fonction vectorielle de classe C^2 telle qu'en tous les points de son domaine de définition l'on ait

$$\boldsymbol{r}(t)\,\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t) = 0, \quad \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}.$$

Montrer que l'image de la courbe définie par la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ est plane.

35. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ une fonction vectorielle de classe C^2, définie sur l'intervalle $]a, b[$ et dont les dérivées $\boldsymbol{r}'(t)$ et $\boldsymbol{r}''(t)$ sont différentes de zéro et colinéaires pour tous les $t \in]a, b[$. Montrer que l'image de la courbe définie par la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ est un intervalle de droite.

36. Montrer que l'image de la courbe définie par la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{r}_1 + t^2\boldsymbol{r}_2$, $t \in \mathbb{R}$, où $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ sont des vecteurs constants, est une parabole si les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ ne sont pas colinéaires. Etudier le cas où les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ sont colinéaires.

37. Montrer que l'image de la courbe définie par la fonction vectorielle

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \cos t\, \boldsymbol{r}_1 + \sin t\, \boldsymbol{r}_2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

est une ellipse si les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ ne sont pas colinéaires. Etudier le cas où les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ sont colinéaires.

38. Montrer que l'image de la courbe définie par la fonction vectorielle

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \operatorname{ch} t\, \boldsymbol{r}_1 + \operatorname{sh} t\, \boldsymbol{r}_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

est une branche d'hyperbole si les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ ne sont pas colinéaires. Etudier le cas où $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ sont colinéaires.

39. Montrer que la trajectoire d'un point matériel en mouvement sous l'effet d'une force centrale est plane.

40. Montrer que les deux courbes lisses paramétrées $\boldsymbol{r}(t) = (t, 0, 0)$ et $\boldsymbol{r}_1(t) = (t^3, 0, 0)$ ne sont pas équivalentes bien que l'image de chacune d'elles soit une droite.

41. Montrer que les figures planes suivantes sont des lignes et en indiquer des représentations paramétriques: a) la droite, b) le cercle, c) l'ellipse, d) la parabole, e) l'hyperbole.

42. Montrer que le cercle S^1 n'admet de représentation paramétrique $(I, \boldsymbol{r})$ au sens de la définition de la ligne, telle que $\boldsymbol{r}(I) = S^1$.

43. Montrer que toute courbe régulière $(I, \boldsymbol{r})$ est localement simple, c'est-à-dire que pour tout $t_0 \in I$ il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $t_0 \in J$ et $(J, \boldsymbol{r}|_J)$ est une courbe simple.

44. Montrer que l'image d'une courbe régulière est localement une ligne.

45. Montrer que toute courbe régulière définit exactement deux courbes orientées.

46. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ possède des dérivées partielles ou une différentielle nulle dans un certain domaine est que le vecteur $\boldsymbol{r}(u, v)$ soit constant.

47. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'en tout point d'un certain domaine de variation des paramètres u et v

le vecteur $\boldsymbol{r}(u, v)$ soit orthogonal aux vecteurs $\partial_u \boldsymbol{r}(u, v)$ et $\partial_v \boldsymbol{r}(u, v)$ est que $|\boldsymbol{r}(u, v)| = \text{const}$.

48. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ une fonction vectorielle de classe C^1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\boldsymbol{r}(u, v)$ possède une direction constante est qu'il soit colinéaire aux vecteurs $\partial_u \boldsymbol{r}(u, v)$ et $\partial_v \boldsymbol{r}(u, v)$ dans le domaine de variation des paramètres u et v.

49. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'image d'une fonction vectorielle lisse $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, telle que $\partial_u \boldsymbol{r} \nparallel \partial_v \boldsymbol{r}$, soit plane est que les vecteurs $\partial_u \boldsymbol{r}$ et $\partial_v \boldsymbol{r}$ soient parallèles à ce plan.

50-53. Soient $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ des vecteurs constants tels que $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ ne soient pas colinéaires. Trouver les images des fonctions vectorielles suivantes:

(50) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{r}_1 + u^2\boldsymbol{r}_2 + v\boldsymbol{r}_3$.

(51) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \cos u\, \boldsymbol{r}_1 + \sin u\, \boldsymbol{r}_2 + v\boldsymbol{r}_3$.

(52) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \left(u + \frac{1}{u}\right) \boldsymbol{r}_1 + \left(u - \frac{1}{u}\right) \boldsymbol{r}_2 + v\boldsymbol{r}_3$.

(53) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u \cos v\, \boldsymbol{r}_1 + u \sin v\, \boldsymbol{r}_2 + u^2\boldsymbol{r}_3$.

54. Montrer que le plan est une surface élémentaire. Indiquer deux de ses représentations paramétriques.

55-63. Montrer que les figures suivantes sont des surfaces de $\mathbb{R}^3$ et construire leurs représentations paramétriques.

(55) La sphère.
(56) L'ellipsoïde.
(57) Le paraboloïde elliptique.
(58) L'hyperboloïde à une nappe.
(59) L'hyperboloïde à deux nappes.
(60) Le cylindre elliptique.
(61) Le cylindre parabolique.
(62) Le cylindre hyperbolique.
(63) Le cône épointé.

64. Soient U un domaine de $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. Montrer que le graphe de la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}$, est une surface élémentaire de classe C^k et la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, sa représentation paramétrique.

65. Montrer que toute surface S est localement le graphe d'une fonction, c'est-à-dire que pour tout point $M \in S$ il existe un voisinage $W \in \mathbb{R}^3$ de M tel que $S \cap W$ est le graphe d'une fonction.

66. Soit $\boldsymbol{r}: V \to \mathbb{R}^3$, où V est un domaine de $\mathbb{R}^2$ et supposons que $\partial_u \boldsymbol{r} \nparallel \partial_v \boldsymbol{r}$ pour tous les points de V.

a) L'ensemble $\boldsymbol{r}(V)$ est-il une surface?

b) Montrer que pour tout point $(u, v) \in V$ il existe un domaine U de $\mathbb{R}^2$ tel que $(u, v) \in U \subset V$ et $\boldsymbol{r}(U)$ est une surface de classe C^k.

67. Supposons que la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, 0)$, où $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid v = 0, \ u \geqslant 0\}$ est une représentation paramétrique d'une surface S.

a) Quelle est la forme de la surface S?

b) Trouver le domaine sur lequel la fonction vectorielle $\boldsymbol{\rho}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$ est une représentation paramétrique de la surface S.

c) Construire le changement des représentations paramétriques indiquées.

CHAPITRE 2

LIGNES ET COURBES PLANES

§ 1. Procédés de définition

Si une fonction vectorielle $\boldsymbol{r}: I \to \mathbb{R}^2$, $t \to \boldsymbol{r}(t)$ est une représentation paramétrique d'une ligne ou d'une courbe, alors l'équation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (1)$$

s'appelle *équation vectorielle de la ligne* (*courbe*). Si $(x(t), y(t))$ sont les composantes de la fonction vectorielle (1) par rapport à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales dans $\mathbb{R}^2$, alors l'équation (1) est équivalente à deux équations paramétriques:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \qquad (2)$$

La *définition explicite de la ligne* (resp. *de la courbe*)

$$y = f(x) \qquad (3)$$

est un cas particulier de la définition paramétrique (2).

La ligne (l'image de la courbe) peut être également définie par l'*équation implicite*

$$F(x, y) = 0. \qquad (4)$$

Au lieu des coordonnées rectangulaires on peut utiliser les coordonnées polaires.

68. Ecrire l'équation du lieu géométrique plan des points dont le produit des distances à deux points fixes donnés F_1 et F_2 ($|F_1F_2| = 2b$) est une constante égale à a^2 (les *ovales de Cassini*). Lesquelles de ces figures sont des lignes et lesquelles peuvent être des images de courbes?

69. On donne un cercle de diamètre $OA = 2a$ et la tangente en A. Une corde variable passant par O coupe le cercle en C et la tangente en B. On porte $OM = BC$. Le lieu géométrique de M est une *cissoïde de Dioclès*. On demande son équation. Est-elle une ligne?

70. Par l'origine O d'un système de coordonnées rectangulaires xOy on mène une droite qui coupe en D le cercle

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

et en E la tangente au cercle au point C diamétralement opposé à O. Les parallèles menées à Ox et Oy à partir des points D et E se coupent en M. Equation du lieu de M (une *agnésienne*).

71. Un point M est en mouvement uniforme sur une droite ON en rotation uniforme autour de O. On demande l'équation du lieu géométrique de M qui est une *spirale d'Archimède.*

72. Une droite OL tourne autour de O avec une vitesse angulaire constante ω. Un point M se déplace sur OL à une vitesse proportionnelle à $|OM|$. Le lieu géométrique de M est une *spirale logarithmique*. On demande son équation.

73. Un segment AB de longueur constante $2a$ se déplace en gardant ses extrémités sur les axes d'un système de coordonnées rectangulaires xOy. De l'origine des coordonnées on abaisse une perpendiculaire OM sur AB. Le lieu géométrique de M est une *rose à quatre branches* dont on demande l'équation. Est-elle une ligne? Peut-elle être l'image d'une courbe?

74. On donne un cercle de rayon a et une corde variable passant par un point O de ce cercle. De part et d'autre du point d'intersection A de cette corde avec le cercle on porte des segments $AM_1 = AM_2 = 2b$. On demande l'équation du lieu géométrique des points M_1 et M_2 (un *limaçon de Pascal*; pour $a = b$ c'est une *cardioïde*). Tout limaçon de Pascal est-il une ligne?

75. Une droite $x = a$ coupe l'axe Ox en A et un axe quelconque passant par O en B. Sur l'axe OB on porte de part et d'autre de B des segments $BM_1 = BM_2 = AB$. Le lieu géométrique des points M_1 et M_2 est une *strophoïde* Φ. On demande son équation. Les figures Φ et $\Phi \setminus A$ sont-elles des lignes? Peuvent-elles être des images de courbes?

76. Par le point E de coordonnées polaires $(a, \pi/2)$ on trace une droite parallèle à l'axe polaire, qui coupe en K une droite passant par O. De part et d'autre de K on porte sur la droite OK des segments KM_1 et KM_2 de longueur l. Le lieu géométrique des points M_1 et M_2 est une *conchoïde de Nicomède*. On demande son équation. Est-elle une ligne? Peut-elle être l'image d'une courbe?

77. Les extrémités d'un segment AB de longueur a glisse sur les axes d'un système de coordonnées rectangulaires. Les parallèles aux axes de coordonnées menées à partir de A et de B se coupent en C. Du point C on abaisse une perpendiculaire CM sur AB. Le lieu géométrique de M est une *astroïde*. On demande son équation. Est-elle une ligne?

78. On demande les équations paramétriques de la développante du cercle, c'est-à-dire de la trajectoire obtenue en déroulant un fil tendu sur ce cercle.

79. Un cercle de rayon a roule sans glisser sur une droite. Le lieu géométrique d'un point M lié au cercle et se trouvant à une distance d du centre est une *cycloïde* pour $d = a$, une *cycloïde raccour-*

cie pour $d < a$ et une *cycloïde allongée* pour $d > a$. On demande son équation.

80. Un cercle de rayon r roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle de rayon R. La trajectoire d'un point M du cercle roulant est une *épicycloïde*. On demande son équation. Que se passe-t-il pour $r = R$?

81. Un cercle de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon R. La trajectoire d'un point M du cercle roulant est une *hypocycloïde*. On demande son équation. Que se passe-t-il pour $R = 4r$, $R = 2r$?

82. Soit donnée la courbe

$$x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - 2.$$

Les points $M(-1, -1)$, $N(4, 2)$, $P(1, 2)$ appartiennent-ils à son image? Trouver les points d'intersection de l'image de cette courbe avec les axes de coordonnées. On demande l'équation implicite de l'image de la courbe.

83. Equations paramétriques du cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ si le paramètre est:

a) le coefficient angulaire d'une corde passant par l'origine des coordonnées;

b) l'angle de l'axe Ox et d'un diamètre.

84-91. Construire les images des courbes suivantes:

(84) $x = t^2 - t + 1, \quad y = t^2 + t + 1.$

(85) $x = t^2 - 2t + 3, \quad y = t^2 - 2t + 1.$

(86) $x = a\sin^2 t, \quad y = b\cos^2 t.$

(87) $x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}.$

(88) $x = 3^t + 3^{-t}, \quad y = 3^t - 3^{-t}.$

(89) $x = \dfrac{a-t}{a+t}, \quad y = \dfrac{t}{a+t}.$

(90) $x = a\ln t, \quad y = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right).$

(91) $x = a + R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b + R\dfrac{2t}{1+t^2}.$

92. Une équation paramétrique de l'hyperbole est

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Comment se déplace le point courant sur l'hyperbole lorsque le paramètre t croît de $-\infty$ à $+\infty$? Par quel changement de paramètre peut-on mettre l'équation paramétrique de la branche de

droite de l'hyperbole sous la forme

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \operatorname{sh} \varphi ?$$

93. Montrer que les équations

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

et

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1+t^2}$$

sont les équations paramétriques d'une même ligne. Graphique de cette ligne. Comment se déplace le point courant lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$?

94-104. Nature des lignes décrites en coordonnées polaires par les équations suivantes:

(94) $r = 4$.

(95) $r = 2a \cos \varphi$. (96) $r = \dfrac{a}{\cos \varphi}$.

(97) $r = \dfrac{b}{\sin \varphi}$. (98) $r = \dfrac{16}{5-3\cos \varphi}$.

(99) $r = \dfrac{16}{3-5\cos \varphi}$. (100) $r = \dfrac{2}{1-\cos \varphi}$.

(101) $r^2 \cos 2\varphi = a^2$. (102) $r = b \sin \varphi$.

(103) $r = \sec^2 (\varphi/2)$. (104) $r = \operatorname{cosec}^2 (\varphi/2)$.

105. Une courbe d'équation paramétrique $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ est *unicursale* si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions rationnelles du paramètre t. Montrer qu'une courbe est unicursale si son image peut être définie par une équation de la forme

$$\varphi_n (x, y) + \varphi_{n-1} (x, y) = 0,$$

où $\varphi_p (x, y)$ est un polynôme homogène de degré p.

106-110. Montrer que les courbes décrites par les équations ci-après sont les images de courbes unicursales et trouver leurs équations paramétriques:

(106) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

(107) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

(108) $(x^2 + y^2) x - 2ay^2 = 0$.

(109) $r = a (1 + \cos \varphi)$.

(110) $(x^2 + y^2) x + a^2 (x^2 - y^2) = 0$.

§ 2. Tangence. Tangente et normale

Les équations des tangentes aux lignes (courbes) définies par les équations (1) à (4) du § 1 sont respectivement de la forme

$$\rho = r + \lambda r',$$

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'},$$

$$Y - y = f'(x)(X - x),$$

$$(X-x) F_x + (Y-y) F_y = 0,$$

où X et Y sont les coordonnées du point courant sur la tangente, ρ le rayon vecteur de ce point, x, y les coordonnées du point de tangence. Les équations des normales sont respectivement de la forme

$$(\rho - r)\cdot r' = 0,$$

$$(X-x) x' + (Y-y) y' = 0,$$

$$X - x + (Y-y) f'(x) = 0,$$

$$\frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y}.$$

Si deux lignes possédant un point commun M_0 admettent des représentations paramétriques intrinsèques $r_1 = r_1(s)$, $r_2 = r_2(s)$ telles que $r_1(s_0) = r_2(s_0) = M_0$ et

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|r_1(s_0+\Delta s) - r_2(s_0+\Delta s)|}{(\Delta s)^k} = 0,$$

k étant le plus grand des nombres vérifiant cette condition, on dit alors qu'elles présentent un *contact d'ordre* k en M_0. Deux lignes présentent en un point commun M_0 un contact d'ordre k si et seulement s'il existe des représentations paramétriques intrinsèques $r_1 = r_1(s)$, $r_2 = r_2(s)$ telles que $r_1(s_0) = r_2(s_0) = M_0$ et pour $s = s_0$

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{dr_2}{ds}, \; \ldots, \; \frac{d^k r_1}{ds^k} = \frac{d^k r_2}{ds^k}, \quad \frac{d^{k+1} r_1}{ds^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} r_2}{ds^{k+1}}.$$

Si deux lignes ayant un point commun M_0 admettent des représentations paramétriques $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$ telles que $r_1(t_0) = r_2(t_0) = M_0$ et pour $t = t_0$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt}, \; \ldots, \; \frac{d^k r_1}{dt^k} = \frac{d^k r_2}{dt^k}, \quad \frac{d^{k+1} r_1}{dt^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} r_2}{dt^{k+1}},$$

alors ces lignes présentent un contact d'ordre k en M_0.

Supposons qu'une ligne est donnée sous la forme paramétrique $x = x(t)$, $y = y(t)$ et une autre sous la forme implicite $F(x, y) =$

$= 0$. Si en un point commun à ces lignes on a

$$F(x(t),\ y(t))=0,\ \frac{dF}{dt}=0,\ \ldots,\ \frac{d^kF}{dt^k}=0,\ \frac{d^{k+1}F}{dt^{k+1}}\neq 0,$$

alors ces lignes présentent un contact d'ordre k en ce point.

111-127. Former les équations de la tangente et de la normale aux lignes et courbes suivantes:

(111) $y = x^2 + 4x + 3$ aux points A, B et C d'abscisses $-1, 0, 1$.

(112) $y = x^3$ aux points A et B d'abscisses 0 et 1.

(113) $y = \sin x$ aux points d'abscisses $0, \pi/2, \pi$.

(114) $y = \operatorname{tg} x$ aux points d'abscisses $0, \pi/4$.

(115) $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 + 1$ au point $A\ (t = 1)$.

(116) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

(117) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

(118) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

(119) $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$.

(120) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ au point $A\ (3a/2,\ 3a/2)$.

(121) $(x^2 + y^2)\,x - ay^2 = 0$ au point $A\ (a/2,\ a/2)$.

(122) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = C$.

(123) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (124) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

(125) $y^2 = 2px$. (126) $r = a\varphi$.

(127) $r = 2a\cos\varphi$ au point A pour lequel $\varphi = \pi/4$.

128. En quel point la tangente à la parabole $y = x^2$ fait-elle un angle de 45° avec l'axe des x?

129. La pente de la tangente en un point de la ligne $y = x^3$ peut-elle être égale à $3\pi/4$?

130. Montrer que la pente φ de la tangente en un point arbitraire de la ligne

$$y = x^5 + 2x^3 + x - 1$$

appartient à l'intervalle $[\pi/4,\ \pi/2[$.

131. Trouver la tangente à la parabole $y = x^2$, parallèle à la droite

$$y = 4x - 5.$$

132. En quel point la tangente à la parabole $y = x^2 - 6x + 5$ est-elle perpendiculaire à la droite $x - 2y + 8 = 0$?

133. Dans l'équation de la parabole $y = x^2 + bx + c$, choisir les constantes b et c telles que la parabole soit tangente à la droite $y = 3x - 5$ au point d'abscisse $x = 2$.

134. En quels points de même abscisse (non nulle) les tangentes aux lignes $y = x^2$, $y = x^3$ sont-elles parallèles?

135. Montrer qu'une seule normale à la ligne $y = x^n$ (n est un entier positif) passe par l'origine des coordonnées.

136. Equations des tangentes à la courbe $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + 1$, parallèles à la droite $2x - y + 3 = 0$.

137. Equations des tangentes à la courbe $x = t^3$, $y = t^2$, passant par le point $M(-7, -1)$.

138. Montrer que les lignes

$$y = a \sin (x/a),\quad y = a \operatorname{tg} (x/a),\quad y = a \ln (x/a)$$

coupent l'axe Ox sous un angle ne dépendant pas de a.

139. Equations des tangentes à l'astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

les plus éloignées de l'origine des coordonnées.

140. Montrer qu'en tout point M de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$ la normale *) est égale à OM.

141. Montrer que toutes les normales à la développante du cercle $x = a (\cos t + t \sin t)$, $y = a (\sin t - t \cos t)$ sont équidistantes de l'origine des coordonnées.

142. Montrer que si toutes les normales à une ligne plane passent par un point fixe, alors cette ligne est un cercle ou une partie d'un cercle.

143-146. Trouver les points d'intersection et les angles des lignes suivantes:

(143) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

(144) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 6x = 9$.

(145) $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.

(146) $y = \sin x$, $y = \cos x$.

147-149. Montrer que les lignes suivantes sont orthogonales:

(147) $y = x - x^2$, $y = x^2 - x$.

(148) $y^2 = 2ax + a^2$, $y^2 = -2bx + b^2$.

(149) $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$.

150. Montrer que la tangente de l'angle de la tangente à une courbe $r = r(\varphi)$ et du rayon vecteur du point de contact est donnée par

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{dr/d\varphi}.$$

151. Montrer que l'angle de la tangente à la cardioïde et du rayon vecteur du contact est égal à la moitié de l'angle polaire.

152. Montrer que les tangentes à la cardioïde $r = 2a (1 - \cos \varphi)$ menées en les extrémités de la corde passant par le pôle sont orthogonales.

---

*) Pour la définition de la normale, voir exercice 160. (*Note du traducteur.*)

153. Montrer que l'angle d'une tangente à la spirale d'Archimède $r = a\varphi$ et du rayon vecteur du point de contact tend vers 90° lorsque $\varphi \to \infty$.

154. Montrer que l'angle μ de la tangente en un point quelconque de la spirale logarithmique $r = ca^{\varphi}$, $a > 0$, et du rayon vecteur du point de contact est constant.

155. Montrer que seuls les spirales logarithmiques et les cercles possèdent la propriété indiquée dans l'exercice **154.**

156. Montrer que l'angle μ de la tangente en un point arbitraire de la lemniscate de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ et du rayon vecteur du point de contact est égal à $2\varphi + \frac{\pi}{2}$, où φ est l'angle polaire du point de contact. En déduire une méthode de construction de la tangente et de la normale en un point arbitraire de la lemniscate.

157. Soient $r = r(\varphi)$ et $r_1 = r_1(\varphi)$ des courbes en coordonnées polaires. Montrer qu'elles sont orthogonales si $rr_1 + r'r_1' = 0$.

158-159. Montrer que les courbes suivantes sont orthogonales:

(158) $r = ae^{\varphi}$, $r = be^{-\varphi}$.

(159) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\quad r = a(1 - \cos\varphi)$.

160. Supposons que la tangente et la normale à la ligne $y = y(x)$ en M coupent l'axe Ox respectivement en T et en N et soit P la projection de M sur Ox. Montrer que la tangente MT, la normale MN, la sous-tangente PT et la sous-normale PN sont définies par

$$|MT| = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2}, \qquad |MN| = |y| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$|PT| = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad |PN| = |yy'|.$$

161-162. Trouver la longueur de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et de la sous-normale des lignes:

(161) $y = \operatorname{tg} x$ au point M d'abscisse $\pi/4$.

(162) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en un point arbitraire.

163. Equations des lignes dont la sous-normale est une constante k.

164. Equations des lignes dont la sous-tangente est une constante k.

165. Montrer que les seules lignes dont la normale soit une constante sont les cercles centrés sur l'axe Ox.

166. Equations des lignes dont la tangente est une constante a.

167. Montrer que l'aire S limitée par la tractrice (voir réponse de l'exercice **166**) et l'axe des abscisses est finie.

168. Soient donnés une courbe $r = r(\varphi)$ et un point M de cette courbe. La droite perpendiculaire au rayon vecteur de M en O coupe

en N la normale en M et en T la tangente en M. Montrer que la tangente polaire MT, la normale polaire MN, la sous-tangente polaire OT et la sous-normale polaire ON sont données par les formules

$$|MT| = \left|\frac{r}{r'}\right| \sqrt{r^2+r'^2}, \quad |MN| = \sqrt{r^2+r'^2},$$

$$|OT| = \frac{r^2}{|r'|}, \quad |ON| = |r'|.$$

169. Equations des courbes dont la sous-tangente polaire est une constante égale à k.

170. Equations des courbes dont la sous-normale polaire est égale à une constante.

171. Equations des courbes dont la polaire normale est une constante k.

172. Montrer que le segment de tangente à l'astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

découpé par les axes de coordonnées est égal à a.

173. Montrer que les tangentes à la lemniscate de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ menées aux extrémités d'une corde passant par le pôle du système de coordonnées sont parallèles.

174. Montrer que les tangentes aux points d'intersection d'une tangente à l'astroïde se coupent en un point situé sur le cercle circonscrit à l'astroïde.

175. Montrer que pour que deux lignes possèdent en un point commun un contact d'ordre $\leqslant 1$ il est nécessaire et suffisant qu'elles admettent en ce point une tangente commune.

176. Montrer que la ligne $y = e^{kx} \sin mx$ est tangente à chacune des lignes $y = e^{kx}$ et $y = e^{-kx}$.

177-178. Trouver l'ordre de contact en l'origine des coordonnées des lignes suivantes:

(177) $y = \sin x, \quad y = \operatorname{tg} x.$

(178) $y = x^3, \quad y = x \sin x.$

179. Montrer que les lignes

$$y = \sin x, \quad y = x^4 - \frac{1}{6} x^3 + x$$

possèdent en l'origine des coordonnées un contact d'ordre 3.

180. Indiquer l'ordre de contact en A (1, 1) des lignes suivantes:

$$x^2+y^2-6x-6y+10=0, \ \sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0 \ \ (x>0, \ y>0).$$

181. Pour quelles valeurs de a et de b la parabole $y = x^2 + ax + b$ est-elle tangente au cercle $x^2 + y^2 = 2$ au point M (1, 1).

182. Equation du cercle qui présente en l'origine des coordonnées un contact de deuxième ordre avec la parabole $y = x^2$.

183. Equation de la parabole présentant le contact de plus grand ordre avec la ligne $y = \ln x$ au point M (1, 0).

184. Trouver la ligne $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ qui présente un contact d'ordre n en A $(0, f(0))$ avec la ligne $y = f(x)$.

185. Equations: a) de l'ellipse, b) de l'hyperbole, c) de la parabole, dont les sommets sont confondus avec le sommet A $(\pi R, 2R)$ de la cycloïde $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$ et qui présentent le contact de plus grand ordre avec cette cycloïde.

§ 3. Asymptotes. Points singuliers. Etude et construction de lignes (courbes)

Si une ligne (une courbe)

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

admet une asymptote pour $t \to t_0$ d'équation $Y = kX + b$, alors

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t \to t_0} (y(t) - kx(t)).$$

Si la ligne (courbe) (1) admet une asymptote verticale pour $t \to t_0$, l'équation de cette dernière est $x = a$, où

$$a = \lim_{t \to t_0} x(t), \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty.$$

Soit $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ l'équation paramétrique d'une courbe. On dira

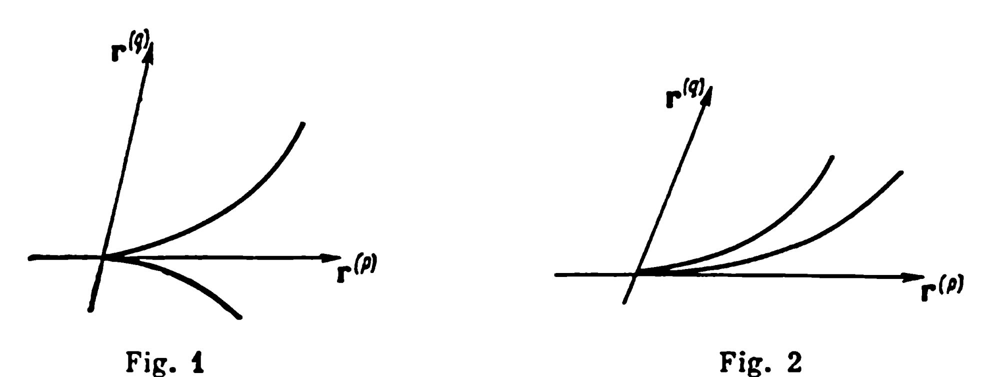


Fig. 1 Fig. 2

d'un point $M = \mathbf{r}(t_0)$ de cette courbe qu'il est *non régulier*, ou singulier, si $\mathbf{r}'(t_0) = 0$.

Soient $\mathbf{r}^{(p)}(t_0)$ la première dérivée non nulle, $\mathbf{r}^{(q)}(t_0)$ la première dérivée non colinéaire au vecteur $\mathbf{r}^{(p)}(t_0)$. On distinguera quatre cas:

1) p est impair, q, pair;
2) p est impair, q, impair;
3) p est pair, q, impair;
4) p est pair, q, pair.

Dans le premier cas, l'image de la courbe au voisinage du point M est de la même forme qu'au voisinage d'un point régulier. Dans le deuxième, le point M est un *point d'inflexion*. Dans le troisième, le point M est un *point de rebroussement de première espèce* (voir fig. 1).

Dans le quatrième, le point M est un *point de rebroussement de seconde espèce* (voir fig. 2).

Soit l une figure plane d'équation

$$F(x, y) = 0, \qquad (2)$$

où F est une fonction lisse telle que

a) il existe des points $M_1, \ldots, M_k$ de l tels que la figure $l_1 = l \setminus \{M_1, \ldots, M_k\}$ soit une ligne;

b) aucune des figures $l_1 \cup \{M_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ne soit une ligne.

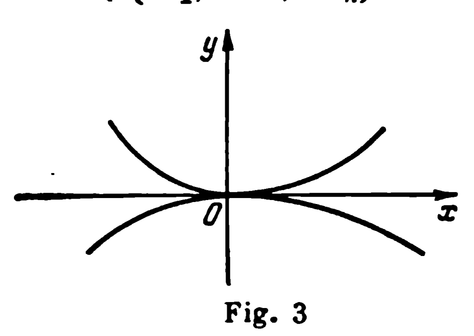


Fig. 3

On dit alors que les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$ sont singuliers pour la ligne l. Seuls les points en lesquels $F_x(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$ peuvent être singuliers. On appelle *point singulier double* de la ligne (2) un point singulier en lequel l'une au moins des dérivées secondes de la fonction $F(x, y)$ est différente de zéro.

Si par un point singulier double M passe une ligne élémentaire appartenant à la ligne (2) et si $F_{yy} \neq 0$ en ce point, alors le coefficient angulaire k de la tangente à cette ligne élémentaire se déduit à partir de l'équation $F_{xx} + 2F_{xy}k + F_{yy}k^2 = 0$.

Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$ en un point singulier double, alors on peut mettre en évidence deux lignes élémentaires passant par le voisinage de ce point, que l'on appelle *point de self-intersection.* Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$ en un point M, alors dans un voisinage de M, sauf en M, il n'existe pas d'autres points vérifiant l'équation (2). Un tel point est dit *isolé.* Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0$ en M, ce point peut être de rebroussement de première ou de seconde espèce ou *autotangentiel.* Dans ce dernier cas, au voisinage de M la ligne a l'allure représentée sur la figure 3.

Etudier une ligne, c'est mettre en évidence ses propriétés fondamentales qui permettent de la construire avec assez de précision:

points singuliers, points d'inflexion, asymptotes, points de self-intersection, points en lesquels les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées, points d'intersection avec les axes de coordonnées.

186-191. Equations des asymptotes des lignes:

(186) $y = \frac{2}{x-3}$. (187) $y = \frac{5}{x^2-16}$.

(188) $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$. (189) $y = \frac{x^2-4x+7}{x}$.

(190) $y = \frac{x^2}{x+2}$. (191) $y = \frac{x^3+1}{x}$.

192-194. Equations des asymptotes des courbes définies par les équations paramétriques:

(192) $x=\frac{2t}{(t-1)(t-2)}$, $y=\frac{t^2}{(t-1)(t-3)}$.

(193) $x=\frac{2t-1}{t^2-1}$, $y=\frac{t^2}{t-1}$.

(194) $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

195-197. Equations des asymptotes des lignes définies par les équations implicites:

(195) $xy^2-y^2-4x=0$.

(196) $xy^2=x^2+2x-\frac{5}{4}$.

(197) $(x^2-y^2)(x-y)=1$.

198-199. Equations des asymptotes des courbes définies par les équations en coordonnées polaires:

(198) $r=\frac{a}{\sin\varphi}+l$ (*conchoïde de Nicomède*).

(199) $r=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ (*cissoïde de Dioclès*).

200-204. Trouver les points singuliers des lignes définies par les équations suivantes:

(200) $y^2=x^3+x^2$. (201) $x^2=y^2+x^4$.

(202) $y^2=x^3-x^2$. (203) $x^2y^2=x^2+y^2$.

(204) $4y^2=x^5+5x^4$.

205-209. Points singuliers et équations des tangentes aux lignes suivantes en ces points:

(205) $(x^2+y^2)x-2ay^2=0$ (*cissoïde de Dioclès*).

(206) $(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0$ (*conchoïde de Nicomède*).

(207) $(2a-x)y^2=x(x-a)^2$ (*strophoïde*).

(208) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (*lemniscate de Bernoulli*).

(209) $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$ (*cardioïde*).

210-212. Existe-t-il une tangente et une normale à la ligne

(210) $y=x\sin(1/x)$ au point $x=0$?

(211) $y=x(1+e^{1/x})^{-1}$ au point $x=0$?

(212) $y=(1+e^{1/(x-1)})^{-1}$ au point $x=1$?

213. Montrer que les coordonnées du point d'inflexion d'une ligne définie par l'équation $F(x, y)=0$ vérifient l'équation

$$F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2=0.$$

214. Trouver l'équation qui détermine les points d'inflexion d'une courbe définie par l'équation $r = r(\varphi)$ en coordonnées polaires.

215-222. Etudier et construire les lignes définies par les équations suivantes:

(215) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$. (216) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$.

(217) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$. (218) $y=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

(219) $y=\sqrt{\frac{125-x^3}{3x}}$. (220) $y=\frac{\ln x}{x}$.

(221) $y=e^{-x^2}$. (222) $y=e^{1/x}$.

223-238. Etudier et construire les images des courbes définies par les équations paramétriques:

(223) $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ (*folium de Descartes*).

(224) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t(1-t)}{1+t^2}$.

(225) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t^3}{1+t^2}$.

(226) $x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

(227) $x=t^2$, $y=\frac{2}{3}t(3-t^2)$.

(228) $x=\frac{t^2}{1-t}$, $y=\frac{t^3}{1-t^2}$.

(229) $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{t^3}{1-t^2}$.

(230) $x=4t^2$, $y=3t(t^2+1)$.

(231) $x=t^4$, $y=t^2-t^5$.

(232) $x=\frac{t^5}{10(1-t)}$, $y=t^3$.

(233) $x=\frac{t}{1-t^2}$, $y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.

(234) $x=t^2$, $y=t^4+t^5$.

(235) $x=\frac{5t^2}{1+t^5}$, $y=\frac{5t^3}{1+t^5}$.

(236) $x=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y=\frac{(t-2)^2}{t-1}$.

(237) $x = \frac{4t}{1-t^4}$, $y = \frac{4t^2}{1-t^4}$.

(238) $x = 2 \sin t$, $y = \frac{2 \cos^2 t}{2 + \cos t}$.

239-274. Etudier et construire les lignes (à points singuliers) définies par les équations:

(239) $x^3 - y^2 + 1 = 0$.

(240) $xy^2 - y^2 - 4x = 0$.

(241) $x (x^2 + y^2) - y^2 + x = 0$.

(242) $xy^2 = x^2 + 2x - \frac{5}{4}$.

(243) $x^4 + y^4 = a^4$.

(244) $x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0$.

(245) $(x^2 - y^2)^2 = 2x$.

(246) $(x^2 - y^2) (x - y) = 1$.

(247) $(x - y) xy + x + y = 0$.

(248) $x^2y^2 + y = 1$.

(249) $x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 = 0$.

(250) $x^2 + y^2 = x^2y^2$.

(251) $x^4 - y^4 + x^2 + 2y^2 = 0$.

(252) $x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

(253) $(x^2 - y^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$.

(254) $xy^2 = - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$.

(255) $x (x^2 - 3y^2) - 4 (x^2 + y^2) = 0$.

(256) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

(257) $x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0$.

(258) $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$.

(259) $xy^2 = (x - 1)^2$.

(260) $x^4 + y^4 - 2xy = 0$.

(261) $x^2 = y^2 + x^4$.

(262) $(x + 1) (x + 2) y^2 = x^2$.

(263) $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$.

(264) $(x^2 + y^2)^2 = xy$.

(265) $x^3 + y^3 - x^2 = 0$.

(266) $x^3 - 27(x-y)^2 = 0.$

(267) $x^3 - xy^2 + ay^2 = 0.$

(268) $x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0.$

(269) $x^4 - x^2y + y^3 = 0.$

(270) $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0.$

(271) $x^4 + y^4 = 8xy^2.$

(272) $x^6 - x^4 + y^2 = 0.$

(273) $x^4 - y^4 + xy = 0.$

(274) $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2.$

275-281. Etudier et construire les images des courbes définies en coordonnées polaires (parfois en coordonnées généralisées) par les équations suivantes:

(275) $r = \operatorname{tg}(\varphi/2).$

(276) $r^2 = a^2\varphi \ (a \neq 0)$ (*spirale de Fermat*).

(277) $r^2\varphi = a^2, \ a \neq 0.$

(278) $r^2 = a^2\varphi^4, \ a \neq 0$ (*spirale de Galilée*).

(279) $r = a + \frac{l}{\varphi}, \ a \geqslant 0, \ l > 0, \ \varphi > 0.$

(280) $r = a \sin(\varphi/2), \ a > 0.$

(281) $r = a \sin 3\varphi, \ a > 0$ (*rose à trois branches*).

§ 4. Famille de lignes. Enveloppe

Soit donnée l'équation d'une famille de lignes à un paramètre

$$F(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

où C est un paramètre. L'ensemble de tous les points vérifiant le système d'équations

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_c(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

s'appelle *discriminant de la famille* (1).

Si F_x et F_y ne sont pas simultanément nulles en les points du discriminant, alors ce dernier est confondu avec l'*enveloppe de la famille*, c'est-à-dire une ligne qui en chacun de ses points est tangente à une ligne de la famille. Dans le cas contraire, le discriminant peut ne pas exister. Ce cas implique une étude supplémentaire.

Le discriminant d'une famille définie par l'équation vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t, C)$ est déterminé par le système d'équations

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t, C), \quad \boldsymbol{r}_t \times \boldsymbol{r}_C = \mathbf{o}.$$

282-284. Etudier les familles de lignes et tracer leurs graphiques:

(282) $C^2x^2 + y^2 = Cx$.

(283) $x^2 + 2Cy = 2xy$.

(284) $x = \cos u \operatorname{ch} v$, $y = \sin u \operatorname{sh} v$ pour a) $v =$ const, b) $u =$ $=$ const.

285. Montrer que chaque ligne de la famille $\varphi(x, y) = a$ est orthogonale à une ligne quelconque de la famille $\psi(x, y) = b$ en leur point commun si $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$.

286. Montrer que la famille de lignes orthogonales à celles de la famille $\varphi(x, y) = a$ est définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y}.$$

287. Trouver la famille de lignes orthogonales à un faisceau de droites.

288. Trouver la famille de lignes orthogonales à une famille de cercles tangents à l'axe Ox en l'origine des coordonnées.

289. Trouver la famille de lignes orthogonales à la famille de paraboles $y^2 = 2ax$.

290. Trouver la famille de lignes orthogonales à une famille de cercles passant par deux points fixes.

291-299. Trouver l'enveloppe des familles de lignes (à points singuliers) suivantes:

(291) $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

(292) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$.

(293) $x \cos C + y \sin C - p = 0$.

(294) $y = (x - C)^3$.

(295) $y^2 - (x - C)^3 = 0$.

(296) $y^3 - (x - C)^2 = 0$.

(297) $3(y - C)^2 - 2(x - C)^3 = 0$.

(298) $(1 - C^2)x + 2Cy - a = 0$.

(299) $C^2(x - a) - Cy - a = 0$.

300. Trouver l'enveloppe d'une famille de droites formant avec les axes de coordonnées des triangles d'aire S constante.

301. Le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ est l'enveloppe de la famille de droites $Ax + By + C = 0$. On demande la relation qui relie les coefficients A, B et C.

302. Equation de l'enveloppe d'une famille de droites sur lesquelles les axes de coordonnées découpent un segment de longueur constante a.

303. Equation de l'enveloppe d'une famille de droites formant un angle droit dont un côté passe par un point fixe F et dont le sommet parcourt: a) une droite; b) un cercle.

304. Une droite tourne à une vitesse angulaire constante autour d'un point animé d'un mouvement uniforme sur une droite. On demande l'enveloppe de cette famille de droites.

305. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles de rayon r dont les centres décrivent un cercle de rayon R.

306. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles dont les diamètres sont les rayons vecteurs focaux d'une parabole donnée.

307. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles dont les diamètres sont les cordes focales de la parabole $y^2 = 2px$.

308. On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Trouver l'enveloppe des familles de cercles ayant pour diamètres les cordes parallèles aux axes de symétrie.

309. Trouver l'enveloppe des familles de cercles ayant pour diamètres les cordes de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ parallèles aux axes de coordonnées.

310. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles ayant pour diamètres les cordes de la parabole $y^2 = 2px$ perpendiculaires à l'axe de cette dernière.

311. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles de paramètre p dont les axes sont parallèles à Ox et les sommets décrivent la parabole $y^2 = 2qx$.

312. Trouver les conditions que doivent satisfaire les points de l'enveloppe de la famille de lignes $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, où α et β sont reliés par la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

313. Trouver l'enveloppe de la famille de lignes $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$, où $p + q = 1$.

314. Trouver l'enveloppe de la famille de droites $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, les paramètres α et β étant reliés par la relation $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$, $a = \text{const}$. Etudier le cas $m = 2,\ 1,\ -2$.

315. A partir d'un point donné, des points matériels sont lancés dans un même plan vertical sous des angles avec l'horizontale différents, avec une même vitesse initiale v_0. On demande l'enveloppe de leurs trajectoires (parabole de sécurité).

316. Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses dont les axes sont les projections des rayons du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ sur les axes de coordonnées.

§ 5. Longueur d'un arc. Courbure

La longueur d'un arc de courbe définie par les équations

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

$$y = y(x),$$

$$r = r(\varphi)$$

est donnée respectivement par les formules

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

La courbure est donnée respectivement par les formules

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Le cercle osculateur à une courbe en un point donné présente avec cette courbe un contact d'ordre $\leqslant 2$. Le centre du cercle osculateur s'appelle aussi *centre de courbure de la courbe au point donné.* Son rayon, qui s'appelle aussi *rayon de courbure de la courbe au point donné*, se calcule à l'aide de la formule $R = 1/k$. Le disque limité par le cercle osculateur s'appelle souvent *disque de courbure de la courbe.*

317-322. Calculer la longueur d'un arc d'extrémités arbitraires M_1 et M_2 des courbes suivantes:

(317) $y = x^{3/2}$. (318) $y = \ln x$.

(319) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$. (320) $y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

(321) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

(322) $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \sin t$.

323-328. Calculer la longueur de l'arc compris entre les points indiqués des courbes suivantes:

(323) $y = \ln\cos x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi/3.$

(324) $y = \frac{1}{3} x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, les points d'intersection avec l'axe Ox.

(325) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$

(326) $y = \ln\sec x, \quad x_1 = -\pi/3, \quad x_2 = \pi/3.$

(327) $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t, \quad y = 2\operatorname{ch} t, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2.$

(328) $x = 8at^3, \quad y = 3a(2t^2 - t^4), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \sqrt{2}.$

329. Trouver la longueur de l'arc de parabole $r = a\sec^2(\varphi/2)$ intercepté par l'axe Oy.

330. Trouver la longueur d'une arche de cycloïde.

331. Trouver la longueur d'une branche d'épicycloïde (d'hypocycloïde) (voir exercices **80** et **81**).

332-335. Trouver la longueur de la courbe:

(332) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. (333) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

(334) $r = a\cos^4(\varphi/4)$. (335) $r = a\sin^3(\varphi/3)$.

336. Trouver la longueur de la première spire de la spirale d'Archimède $r = a\varphi$.

337. Montrer que la longueur de l'arc de la spirale logarithmique $r = ca^{\varphi}$ compris entre un point arbitraire et le pôle est égale à la tangente polaire menée à la spirale en ce point.

338. Equation de la ligne dont la longueur de l'arc compris entre un point fixe A et un point arbitraire M est proportionnelle au coefficient angulaire de la tangente menée en l'extrémité de l'arc.

339. Montrer que la longueur de l'arc de la chaînette $y = a\operatorname{ch}(x/a)$ limité par le sommet et un point arbitraire est égale à la projection de l'ordonnée de ce point sur la tangente en ce point.

340. Montrer que l'aire limitée par une chaînette, les ordonnées de deux de ses points et l'axe des abscisses est proportionnelle à la longueur de l'arc correspondant, le coefficient de proportionnalité étant le paramètre a de la chaînette.

341. Montrer que le produit des longueurs des arcs limités par le sommet d'une chaînette et par les points de contact de deux tangentes orthogonales est une quantité constante.

342. Former l'équation intrinsèque du cercle.

343. Former l'équation intrinsèque de la chaînette

$$y = a\operatorname{ch}(x/a).$$

344-353. Trouver la courbure des courbes suivantes:

(344) $y = \sin x$. (345) $y = a\operatorname{ch}(x/a)$.

(346) $y^2 = 2px$. (347) $x = t^2$, $y = t^3$.

(348) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

(349) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

(350) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

(351) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

(352) $r = a\varphi$. (353) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

354. Trouver la courbure de la ligne définie par l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

355-356. Trouver la courbure des lignes suivantes:

(355) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(356) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

357. Trouver la courbure de la ligne $y = x^4$ au point $O(0, 0)$.

358. Trouver la courbure des lignes définies par leur équation différentielle $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$.

359. Montrer qu'en un point quelconque d'une ligne on a

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2h}{\Delta s^2},$$

où h est la distance du point correspondant à la valeur $s + \Delta s$ du paramètre à la tangente menée au point correspondant à la valeur s du paramètre.

360. Montrer que le rayon de courbure de la cardioïde $r = 2a(1 - \cos\varphi)$ en un point quelconque est égal au 2/3 de la normale polaire en ce point. Indiquer une méthode de construction du centre de courbure pour tout point de la cardioïde.

361. Montrer que le rayon de courbure de la parabole $y = x^2/2p$ est égal à $R = p/\cos^3\alpha$, où α est la pente de la tangente.

362. Montrer que le rayon de courbure de la spirale logarithmique $r = ca^{\varphi}$ en un point quelconque est égal à la normale polaire en ce point. En déduire une méthode de construction du cercle osculateur en un point quelconque de la spirale logarithmique.

363. Calculer le rayon de courbure et indiquer une méthode de construction du centre de courbure en un point quelconque de la tractrice $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \sin t$.

364. Montrer que le segment reliant un point arbitraire de la cycloïde au centre de courbure correspondant à ce point est coupé en son milieu par la base de la cycloïde. En déduire une méthode de construction du centre de courbure pour tout point de la cycloïde.

365. Montrer que l'ordonnée de tout point de la chaînette est la moyenne proportionnelle entre le paramètre de la chaînette et le rayon de courbure en ce point.

366. Montrer que le rayon de courbure de la lemniscate de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ est en tout point égal au tiers de la normale correspondante. En déduire une méthode de construction du centre de courbure en un point quelconque de la lemniscate.

367. Indiquer une méthode de construction géométrique des centres de courbure correspondant aux sommets de l'ellipse.

368. Equations des cercles osculateurs aux sommets (A (a, 0), B (0, b)) de l'ellipse.

369. Equation du cercle osculateur à la ligne $y = \sin x$ au point A ($\pi/2$, 1).

370. Equation du cercle osculateur à l'hyperbole équilatère $xy = 1$ de plus petit rayon.

371-373. Trouver les points en lesquels la courbure prend une valeur extrémale (les *sommets des courbes*):

(371) $y = e^x$. (372) $\begin{cases} x = at - d \sin t, \\ y = a - d \cos t. \end{cases}$

(373) $r = a \sin^3 (\varphi/3)$.

374. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux lignes présentent en leur point commun un contact d'ordre $\geqslant 2$ est qu'elles possèdent une tangente commune et des rayons de courbure égaux.

375. Montrer qu'au point où le rayon de courbure est maximum ou minimum la ligne présente avec le cercle osculateur un contact d'ordre $\geqslant 3$.

376. Trouver les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur à la parabole $y^2 = 2px$. En quel point la parabole et le cercle présentent-ils un contact d'ordre trois?

377. Supposons que deux lignes l_1 et l_2 tangentes en M sont situées du même côté de la tangente en ce point et que $0 < k_1 < k_2$, où k_1 et k_2 sont les courbures respectivement de l_1 et de l_2 en M. Montrer qu'au voisinage de M la ligne l_1 enveloppe la ligne l_2.

378. Montrer qu'au voisinage d'un point A en lequel le rayon de courbure est maximal la ligne est située à l'intérieur du cercle osculateur.

379. Montrer qu'au voisinage d'un point A en lequel le rayon de courbure est minimal la ligne est située à l'extérieur du cercle osculateur.

380. Equation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui présente avec la sinusoïde $y = \sin x$ une tangente et une courbure communes au point A ($\pi/2$, 1).

381. Le cercle $x^2 + y^2 = 5$ est cercle osculateur au point A (1, 2) à une parabole d'axe parallèle à Ox. Equation de cette parabole.

§ 6. Développées et développantes. Equations intrinsèques

La *développée*, c'est-à-dire la figure composée des centres de courbure d'une courbe d'équations (2) § 1, est définie par

$$X = x - y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}, \quad Y = y + x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}.$$

On appelle *développante* d'une courbe γ la courbe γ^* dont γ est la développée. Si la courbe γ est définie par l'équation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, alors l'équation de la famille de ses développantes est de la forme $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + (\lambda - s)\,\boldsymbol{t}$, où $\boldsymbol{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente à la courbe γ, λ un paramètre arbitraire.

On affectera à la courbure d'une courbe un signe bien défini et on la calculera à l'aide de la formule $k = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\alpha}$, où α est la pente de la tangente à la courbe. Dans la suite, le point qui surmonte une lettre indique que la différentiation est effectuée par rapport au paramètre représentant la longueur de l'arc. On appelle *équations intrinsèques d'une courbe* les équations de la forme

$$k = k(s), \quad F(k, s) = 0,$$
$$k = k(t), \quad s = s(t).$$

Si les équations intrinsèques d'une courbe sont données, les équations paramétriques peuvent être définies par

$$x = \int \cos\alpha(s)\,ds, \quad y = \int \sin\alpha(s)\,ds.$$

382. Trouver la développée du cercle.

383-392. Equations et graphiques des développées des courbes suivantes:

(383) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$

(384) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,t.$ (385) $y = x^2.$

(386) $y = x^{2k}$, k est un entier naturel > 1.

(387) $y = x^{2k+1}$, k est un entier naturel.

(388) $y = \ln x.$ (389) $y = \sin x.$

(390) $y = \mathrm{tg}\,x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

(391) $x = a(\ln\mathrm{tg}(t/2) + \cos t), \quad y = a\sin t.$

(392) $r = a(1 + \cos\varphi).$

393. Montrer que la développée de la cycloïde est une cycloïde congrue.

394. Montrer que la développée de l'astroïde est une astroïde qui se déduit de celle donnée par une similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/4$.

395. Montrer que la développée de la spirale logarithmique $r = ca^{\varphi}$ est une spirale logarithmique qui se déduit de celle donnée par une rotation autour du pôle.

396. Quelle condition doit satisfaire le paramètre a de la spirale logarithmique $r = ca^{\varphi}$ pour que cette dernière soit confondue avec sa développée.

397. Equations et graphique des développantes du cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

398. Equation et graphique de la développante de la chaînette $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ passant par le sommet.

399. Equations des développantes de la parabole

$$x = t, \quad y = t^2/4.$$

400-402. Trouver la longueur des arcs des courbes suivantes en les représentant sous forme de développées de certaines courbes:

(400) L'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

(401) Une arche de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

(402) La cardioïde $r = a(1 + \cos\varphi)$.

403-407. Equations intrinsèques des courbes:

(403) $y = x^{3/2}$. (404) $y = \ln x$.

(405) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

(406) $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \sin t$.

(407) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

408-411. Quelles sont les courbes définies par les équations intrinsèques suivantes?

(408) $k = a$. (409) $R = as$.

(410) $R = (a^2 + s^2)/a^2$. (411) $s^2 + R^2 = 16a^2$.

412-415. Equations paramétriques des courbes telles que:

(412) $R \sin^3\alpha = a$. (413) $R = ae^{\alpha}$.

(414) $R = a\alpha$. (415) $s = a \operatorname{tg}\alpha$.

416. Montrer que la cycloïde est une *ligne isochrone*, c'est-à-dire que si une arche de cycloïde est disposée sommet A en bas dans un plan vertical, alors le temps mis par un point matériel se déplaçant sur la cycloïde sous l'action de la force de pesanteur pour se rendre d'une position initiale M en A ne dépend pas de M.

CHAPITRE 3

COURBES ET LIGNES GAUCHES

§ 7. Equations de courbes et de lignes

La représentation paramétrique

$$r = r(t) \tag{1}$$

d'une courbe (ou d'une ligne) de $\mathbb{R}^3$ sera appelée *équation vectorielle paramétrique* de cette courbe (ou de cette ligne). Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, alors les équations

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{2}$$

sont appelées *paramétriques*.

Soient $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$ deux fonctions lisses, l l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Si en un point $M \in l$ les vecteurs

$$\text{grad } F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F) \text{ et grad } G = (\partial_x G, \partial_y G, \partial_z G)$$

ne sont pas colinéaires, alors chacune des équations (3) définit au voisinage de ce point une surface, et l'intersection de ces surfaces est une ligne appartenant à l'ensemble l.

417. L'équation du cylindre circulaire dans un système de coordonnées rectangulaires est $x^2 + y^2 = a^2$. On appelle *hélice* la trajectoire d'un point M du cylindre dont la projection sur l'axe Oz se déplace sur ce dernier à une vitesse constante et la projection sur le plan xOy se déplace uniformément sur le cercle de base. Former les équations paramétriques de l'hélice et trouver ses projections sur les plans de coordonnées.

418. Un point M se déplace le long d'une génératrice d'un cylindre circulaire à une vitesse proportionnelle au chemin parcouru. Trouver les équations paramétriques de la trajectoire de M sachant que le cylindre tourne autour de son axe à une vitesse angulaire constante.

419. Equation de la courbe dont l'image est l'intersection d'une sphère de rayon R et d'un cylindre circulaire de rayon R dont une

génératrice passe par le centre de la sphère. Cette courbe s'appelle *fenêtre de Viviani.*

420. Une droite OL, non perpendiculaire à l'axe Oz, tourne uniformément autour de ce dernier à une vitesse angulaire constante ω. Un point M se déplace sur la droite OL : a) à une vitesse proportionnelle à la distance OM ; b) à une vitesse constante. Dans le premier cas M décrit une *spirale conique*, dans le second, une *hélice conique.* Equations paramétriques de ces lignes.

421. Les axes de deux cylindres circulaires de rayons a et b se coupent sous un angle droit. Les cylindres se coupent suivant deux lignes fermées. L'ensemble de ces lignes s'appelle *bicylindrique.* Former les équations implicites de la bicylindrique et en indiquer une représentation paramétrique. Etudier le cas $a = b$.

422. Montrer que l'image de la courbe $x = at \cos t$, $y = at \sin t$, $z = a^2t^2/2p$ est située sur un paraboloïde de révolution et que sa projection sur l'axe xOy est une spirale d'Archimède.

423. Trouver les projections de l'image de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ sur les plans de coordonnées.

424. Montrer que l'image de la courbe $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $z = ct$ est située sur un cylindre hyperbolique. Trouver ses projections sur les plans de coordonnées.

425. Trouver la projection sur le plan xOy de la ligne d'intersection du paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$ et du plan $x + y - z = 0$.

426. Montrer que la projection sur le plan yOz de la ligne d'intersection du paraboloïde elliptique $x = y^2 + z^2$ et du plan $x - 2y + 4z - 4 = 0$ est un cercle de rayon $R = 3$ centré en M (0, 1, —2).

427. Montrer que l'image de la courbe $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $z = a \cos 2t$ est située sur la partie bornée d'un cylindre dont la directrice est une astroïde et la génératrice est parallèle à l'axe Oz.

428. Représenter l'image de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$ par l'intersection de deux surfaces.

429. Montrer que l'image de la courbe $x = \sin 2\varphi$, $y = 1 - \cos 2\varphi$, $z = 2 \cos \varphi$ est située sur une sphère et est l'intersection d'un cylindre parabolique et d'un cylindre circulaire.

430. Montrer que l'image de la courbe $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos t$ est située sur un ellipsoïde.

431. Montrer que l'image de la courbe $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = ct$ est située sur un cône circulaire.

432. Equation de l'intersection des hyperboloïdes à une nappe $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ et $y^2 + z^2 - x^2 = 1$.

§ 8. Repère de Frenet. Longueur d'un arc

Pour une courbe (ligne) définie dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les vecteurs du repère de Frenet sont désignés par $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{b}$ et les axes et plans de coordonnées par des notations spéciales : l'axe du vecteur $\boldsymbol{t}$ s'appelle

tangente; l'axe du vecteur $\boldsymbol{n}$, *normale principale*; l'axe du vecteur $\boldsymbol{b}$, *binormale*; le plan des vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}$, *plan osculateur*; le plan des vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{b}$, *plan normal* et le plan des vecteurs $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{b}$, *plan rectifiant*.

Les *équations de la tangente* à une courbe définie par les équations (1) et (2) § 7 s'écrivent respectivement

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \tau \boldsymbol{r}',$$

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

où $\mathbb{R}$ est le rayon vecteur du point courant de la tangente, X, Y et Z les composantes du vecteur $\mathbb{R}$.

Equations de la normale principale:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda\left((\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'') \times \boldsymbol{r}'\right),$$

ou

$$X = x + \lambda\left(z'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right),$$

$$Y = y + \lambda\left(x'\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}\right),$$

$$Z = z + \lambda\left(y'\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x'\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\right).$$

Equations de la binormale:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''),$$

ou

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Equation du plan osculateur:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'' = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Equation du plan normal:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r}' = 0,$$

ou

$$(X-x)\, x' + (Y-y)\, y' + (Z-z)\, z' = 0.$$

Equation du plan rectifiant:

$$(R - r)\, r'\, (r' \times r'') = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Les vecteurs unitaires de la tangente, de la normale principale et de la binormale ont pour expressions

$$t = \frac{r'}{|r'|}, \quad n = \frac{(r' \times r'') \times r'}{|r' \times r''|\,|r'|}, \quad b = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}.$$

La longueur de l'arc d'une ligne, ou paramètre intrinsèque, est définie par la formule

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

433-435. Equations des tangentes aux courbes suivantes aux points indiqués:

(433) $x = \sec t, \quad y = \operatorname{tg} t, \quad z = at$ pour $t = \pi/4$.

(434) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t^2$ pour $t = 1$.

(435) $x = e^t \cos t, \; y = e^t \sin t, \; z = e^t$ pour $t = 0$.

436. Equations de la tangente à la courbe

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin (t/2)$$

au point $t = \pi/2$. Quel angle cette tangente fait-elle avec l'axe Oz?

437. En quels points la tangente à la courbe $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ est-elle parallèle au plan $3x + y + z + 2 = 0$?

438. Equations de la tangente et du plan normal à l'hélice $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 4t$ au point $t = 0$.

439. Soit donnée la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Equations de la tangente et du plan normal au point $t = 1$. Quelle ligne obtient-on à l'intersection des tangentes et du plan xOy?

440. Montrer que la ligne $x = e^{t/\sqrt{2}} \cos t$, $y = e^{t/\sqrt{2}} \sin t$, $z = e^{t/\sqrt{2}}$ est située sur le cône $x^2 + y^2 = z^2$ et coupe ses génératrices sous un angle de 45°.

441. Equations de la tangente et du plan normal à la fenêtre de Viviani (voir exercice 419).

442. On appelle *indicatrice sphérique* d'une ligne la figure décrite par les extrémités des vecteurs unitaires des tangentes menées à partir de l'origine des coordonnées. Trouver l'indicatrice sphérique de l'hélice.

443. Montrer que si tous les plans normaux à une ligne gauche passent par un point fixe, alors cette ligne est située sur une sphère (ces lignes sont appelées *sphériques*).

444. Equations de la tangente et du plan normal à une ligne définie par l'intersection de deux surfaces:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0.$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} = 2.$$

445. Equations de la tangente et du plan normal à la ligne $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ en un point arbitraire.

446. Equations du plan normal à la ligne $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ $(y \neq \pm 1)$ en un point arbitraire.

447. Montrer que les plans normaux à la courbe

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \cos t$$

passent par l'origine des coordonnées.

448. Soient $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ une représentation paramétrique intrinsèque d'une courbe, π une droite passant par un point $M_0(s_0)$ de la courbe, $d(\Delta s)$ la distance du point $M(s_0 + \Delta s)$ à la droite π. Montrer que pour que la droite π soit tangente à la courbe $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ en M_0 il est nécessaire et suffisant que $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s} = 0$.

449. Montrer que le plan osculateur à une courbe birégulière $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ en un point donné $M_0(t_0)$ peut être défini par l'une quelconque des trois conditions suivantes:

a) Le plan passant par M_0 et admettant $\boldsymbol{r}'(t_0)$ et $\boldsymbol{r}''(t_0)$ pour vecteurs directeurs.

b) Soient π un plan contenant la tangente à la courbe en M_0, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$ une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe, M_0 correspondant à la valeur s_0 du paramètre, et $d(\Delta s)$ la distance du point $M(s_0 + \Delta s)$ au plan π. Le plan π est un plan osculateur en M_0 si et seulement si

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0.$$

c) Un plan présentant avec la courbe un contact $\geqslant 2$ au point M_0. (Voir définition du contact d'une courbe et d'une surface au § 11.)

450. Montrer que si tous les plans osculateurs à une ligne birégulière passent par un point fixe, alors cette ligne est plane.

451. Equations des plans osculateurs à la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, passant par le point $M_0(2, -1/3, -6)$.

452. Montrer que la droite menée à partir d'un point quelconque M de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ parallèlement au plan $z = 0$ jusqu'à l'intersection avec l'axe Oz est située dans le plan osculateur à la courbe au point M.

453. Equation du plan osculateur à la courbe $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = e^t$ au point $t = 0$.

454. Sur les binormales de la courbe $x = \cos\alpha\cos t$, $y = \cos\alpha\sin t$, $z = t\sin\alpha$, $\alpha =$ const, on porte dans le sens positif des segments de longueur constante égale à l'unité. On demande l'équation du plan osculateur à la courbe décrite par les extrémités de ces segments.

455. Equation du plan osculateur à la ligne d'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et du cylindre hyperbolique $x^2 - y^2 = 3$ au point M (2, 1, 2).

456. Montrer que l'image de la courbe $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = 2t$ est située sur la surface $x^2 + y^2 - e^z = 0$ et que le plan osculateur à la courbe est confondu avec un plan tangent à la surface.

457-458. Equations de la normale principale et de la binormale aux courbes suivantes aux points indiqués:

(457) $x = t,\ y = t^2,\ z = e^t$ pour $t = 0$.

(458) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ pour $t = 1$.

459. A partir de chaque point de la courbe $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a\sin(t/2)$ on porte sur la normale principale un segment de longueur $a\sqrt{1 + \sin^2(t/2)}$ dans le sens du vecteur $\boldsymbol{n}$. Montrer que la ligne décrite par les extrémités de ces segments est une sinusoïde.

460. Trouver les points de la courbe $x = 2/t$, $y = \ln t$, $z = -t^2$ où la binormale est parallèle au plan $x - y + 8z + 2 = 0$.

461. Montrer que les extrémités des segments de longueur égale portés sur les binormales à une hélice décrivent une hélice.

462. Trouver les vecteurs unitaires de la tangente, de la normale principale et de la binormale à la courbe $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = te^t$ en l'origine des coordonnées.

463-464. Trouver les vecteurs unitaires de la tangente, de la normale principale et de la binormale en un point quelconque aux courbes suivantes:

(463) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t$.

(464) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos(t/2)$.

465. Montrer que les vecteurs $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ au point O (0, 0, 0) sont confondus avec les vecteurs unitaires des axes de coordonnées.

466. Equations de la tangente, du plan normal, de la binormale, du plan osculateur, de la normale principale et du plan rectifiant à l'hélice

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

Montrer que la normale principale coupe l'axe de l'hélice sous un angle droit et fait un angle constant avec la binormale. Trouver les vecteurs du repère de Frenet.

467. Equations vectorielles des courbes décrites par les points d'intersection des tangentes, des normales principales et des binormales à la courbe $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ avec le plan xOy.

468. Trouver la longueur de l'arc d'hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ compris entre le point d'intersection avec le plan xOy et un point arbitraire M.

469. On demande une représentation paramétrique intrinsèque de l'hélice.

470. Trouver la longueur d'une spire de la courbe

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos(t/2)$$

limitée par ses deux points d'intersection avec le plan xOz.

471. Trouver la longueur de l'arc de ligne $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, compris entre les plans $y = a/3$ et $y = 9a$.

472. Montrer que la longueur s de la courbe fermée $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ est égale à 10.

473. Trouver la longueur de l'arc de courbe $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$ compris entre les points correspondants aux valeurs 0 et t du paramètre.

474. Expression de la différentielle de la longueur d'arc de courbe en coordonnées cylindriques.

475. Expression de la longueur d'arc de courbe en coordonnées sphériques.

§ 9. Formules de Frenet. Courbure et torsion. Equations intrinsèques

Les *formules de Frenet* d'une courbe birégulière orientée de l'espace $\mathbb{R}^3$ s'écrivent

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k\boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -k\boldsymbol{t} + \varkappa\boldsymbol{b}, \quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{n},$$

où k et $\varkappa$, la *première* et la *deuxième courbure*, sont appelés respectivement *courbure* et *torsion*.

La courbure d'une courbe définie par les équations (1) et (2) § 7 est donnée par

$$k = |\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| / |\boldsymbol{r}'|^3$$

ou

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

La torsion se calcule à l'aide des formules

$$\varkappa = (\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')/(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2,$$

ou

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

En particulier, si pour paramètre on prend le paramètre naturel s, on obtient alors

$$k = |\ddot{\boldsymbol{r}}|, \quad k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad \varkappa = (\dot{\boldsymbol{r}}\,\ddot{\boldsymbol{r}}\,\dddot{\boldsymbol{r}})/\ddot{\boldsymbol{r}}^2,$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

où les points représentent la différentiation par rapport à s. Les équations $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$ s'appellent *équations intrinsèques* de la ligne.

476. Vérifier que pour une courbe $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ on a les relations suivantes:

$$|\dddot{\boldsymbol{r}}|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + \dot{k}^2,$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dddot{\boldsymbol{r}} = -k^2, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dddot{\boldsymbol{r}} = k\dot{k}.$$

477. Montrer que les formules de Frenet

$$\dot{\boldsymbol{t}} = k\boldsymbol{n}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = -k\boldsymbol{t} + \varkappa\boldsymbol{b}, \quad \dot{\boldsymbol{b}} = -\varkappa\boldsymbol{n}$$

peuvent être écrites sous la forme $\dot{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{t}$, $\dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b}$. Trouver le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (le *vecteur de Darboux*) et indiquer sa signification cinétique.

478. Montrer que

(a) $\boldsymbol{t}\boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{b}} = \varkappa$.

(b) $\dot{\boldsymbol{b}}\,\ddot{\boldsymbol{b}}\,\dddot{\boldsymbol{b}} = \varkappa^5 \left(\frac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot}$.

(c) $\dot{\boldsymbol{t}}\,\ddot{\boldsymbol{t}}\,\dddot{\boldsymbol{t}} = k^5 \left(\frac{\varkappa}{k}\right)^{\cdot}$.

479. Montrer que pour qu'une ligne soit une droite ou un intervalle ouvert d'une droite, il est nécessaire et suffisant que $k \equiv 0$.

480. Montrer que pour qu'une ligne birégulière soit plane, il est nécessaire et suffisant que $\varkappa \equiv 0$.

481. Montrer que la courbure d'une ligne L en un point M_0 est égale à celle de la projection L^* de L sur le plan osculateur en M_0.

482-483. Montrer que la courbure et la torsion des courbes suivantes sont égales:

(482) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(483) $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$

484. Trouver la courbure et la torsion de l'hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

485. Trouver la courbure de l'hélice conique $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = at$ en l'origine des coordonnées.

486-489. Trouver la courbure et la torsion des courbes suivantes:

(486) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(487) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2t}.$

(488) $x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$

(489) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t.$

490. Pour quelles valeurs de a et de b la torsion et la courbure de la courbe $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = bt$ sont-elles égales en tous les points?

491. Trouver les points de la courbe $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ en lesquels la courbure prend une valeur (locale) minimale.

492. En quels points de la courbe

$$x = a (t - \sin t), \quad y = a (1 - \cos t), \quad z = 4a \cos (t/2)$$

le rayon de courbure prend-il une valeur minimale locale?

493. Montrer que le rayon de courbure de la spirale conique $x = a \cos \varphi \cdot e^{k\varphi}$, $y = a \sin \varphi \cdot e^{k\varphi}$, $z = be^{k\varphi}$ est proportionnel à la distance du point courant de la spirale à l'axe du cône.

494-495. Montrer que les courbes suivantes sont planes et former les équations des plans contenant leurs images:

(494) $x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t^2}, \quad z = \frac{1}{1+t}.$

(495) $x = a_1t^2 + b_1t + c_1, \quad y = a_2t^2 + b_2t + c_2, \quad z = a_3t^2 + b_3t + c_3.$

496. Trouver une fonction $f(t)$ telle que la courbe $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = f(t)$ soit plane.

497. On appelle *hélice généralisée* une ligne gauche dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixe. Montrer qu'une ligne est une hélice généralisée si et seulement si est réalisée l'une des conditions suivantes:

a) les normales principales sont perpendiculaires à la direction fixe;

b) les binormales forment un angle constant avec la direction fixe;

c) le rapport de la courbure à la torsion est constant.

498. Montrer que la condition $\ddot{\boldsymbol{r}}\ \dddot{\boldsymbol{r}}\ \boldsymbol{r}^{(4)} = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'une ligne d'équation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ soit une hélice généralisée.

499. Montrer que la ligne $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ est une hélice généralisée.

500. Montrer que la ligne $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ est une hélice généralisée située sur une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles au vecteur $\boldsymbol{a}$ (0, 1, 1).

501. Trouver les conditions pour lesquelles la ligne $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$ est une hélice généralisée.

502. Montrer qu'une ligne birégulière est plane si tous ses plans normaux contiennent un vecteur constant $\boldsymbol{e}$.

503. Montrer qu'une ligne birégulière est plane si tous ses plans osculateurs sont perpendiculaires à une droite fixe.

504. Montrer que si entre les points de deux lignes on peut établir une correspondance telle que les tangentes aux points associés soient parallèles, alors le rapport de la courbure à la torsion en ces points est le même en module.

505. On appelle *ligne de Bertrand* une ligne dont les normales principales sont normales principales pour une autre ligne, distincte de la première. Montrer que les lignes de Bertrand sont caractérisées par la relation $\lambda k + \mu \varkappa = 1$, où λ et μ sont des constantes.

506. Montrer que les tangentes aux lignes de Bertrand en des points correspondants font entre elles un angle constant.

507. Montrer que la distance de deux points correspondants de lignes de Bertrand est constante.

508. Montrer qu'une ligne de courbure constante est une ligne de Bertrand. Ceci étant, montrer que la ligne correspondante admet la même courbure et que chacune de ces courbes est le lieu géométrique des centres de courbure de l'autre. Montrer que les tangentes sont perpendiculaires aux points correspondants.

509. Entre les points de deux lignes on a établi une correspondance biunivoque telle que les normales principales, les tangentes et les binormales en un point et en son image sont parallèles. Montrer que $\frac{k^*}{k} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{\varkappa^*}{\varkappa}$, où k, $\varkappa$ et s sont la courbure, la torsion et la longueur d'arc d'une ligne, k^*, $\varkappa^*$ et s^* les mêmes grandeurs de l'autre ligne.

510. Appelons *développante d'une ligne gauche* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la ligne $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - s\boldsymbol{t}$. Exprimer la courbure et la torsion de cette ligne en fonction de la courbure et de la torsion de la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Montrer que si la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ est une hélice généralisée, la ligne $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - s\boldsymbol{t}$ est plane.

511. Montrer que si la courbure et la torsion d'une ligne sont constantes, cette ligne est une hélice.

512. Former les équations paramétriques d'une hélice sachant sa courbure k et sa torsion $\varkappa$.

513. Montrer que de toutes les lignes de Bertrand l'hélice est la seule à présenter des normales principales communes avec une infinité de lignes.

514-515. Equations intrinsèques des courbes suivantes:

(514) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(515) $x = ct, \quad y = \sqrt{2}\, c \ln t, \quad z = ct^{-1}.$

516. Une ligne est définie par les équations intrinsèques $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$. Montrer que les équations intrinsèques $k = k(s)$, $\varkappa = -\varkappa(s)$ sont celles d'une ligne symétrique de la ligne donnée par rapport à l'origine des coordonnées.

517. Montrer que si deux lignes présentent un contact d'ordre $\geqslant 3$, leurs torsions sont égales en ce point. La réciproque est-elle vraie ?

518. Trouver l'ordre de petitesse de la plus courte distance de deux lignes tangentes par rapport à la distance des points de contact. Même question pour les normales principales et les binormales.

519. Montrer qu'une ligne et son cercle osculateur en un point donné présentent un contact d'ordre $\geqslant 2$.

520. Sous quelle condition le centre de courbure d'une hélice est-il situé sur le même cylindre que l'hélice ?

521. On appelle *sphère osculatrice* à une courbe en un point donné la sphère qui présente avec la courbe en ce point un contact d'ordre $\geqslant 3$ (voir dans le § 11 la définition du contact d'une ligne et d'une surface). Montrer que si une courbe est définie par une équation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, le rayon vecteur du centre de la sphère osculatrice est défini par $\boldsymbol{r}_{so} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{n} + \frac{\dot{R}}{\varkappa}\boldsymbol{b}$, et le rayon par $R_{so} = \sqrt{R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\varkappa^2}}$, où $R = \frac{1}{k}$.

522-523. Trouver le rayon de la sphère osculatrice en un point arbitraire aux courbes suivantes:

(522) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}\, t.$

(523) $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = e^t.$

524. Montrer que deux courbes présentant un contact d'ordre $\geqslant 3$ en un point possèdent la même sphère osculatrice en ce point.

525. Montrer qu'une ligne est *sphérique* ou possède une courbure constante si le rayon de la sphère osculatrice est constant.

526. Lieu géométrique des centres des sphères osculatrices à l'hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

527. Montrer que le plan osculateur à une courbe coupe la sphère osculatrice suivant le cercle osculateur.

CHAPITRE 4

SURFACES

§ 10. Equations d'une surface

Soient S une surface, $(U, \boldsymbol{r})$ sa représentation paramétrique. L'équation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{1}$$

s'appelle *équation vectorielle du domaine* $\boldsymbol{r}(U)$ *de la surface* S. S'il existe une fonction vectorielle (1) sur un ensemble $W = \{(u, v)\}$ telle que l'image de $\boldsymbol{r}(W)$ soit égale à S, alors (1) s'appelle *équation vectorielle de la surface*, bien que le couple $(W, \boldsymbol{r})$ puisse ne pas être une représentation paramétrique de S. Si $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, les équations

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{2}$$

s'appellent *équations paramétriques de la surface.*

La représentation paramétrique de la surface est souvent donnée sous la forme $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, où f est une fonction lisse. Dans ce cas, l'équation

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

s'appelle *équation explicite de la surface.*

Soient $F(x, y, z)$ une fonction lisse, S l'ensemble des solutions de l'équation

$$F(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

Si en un point $M \in S$ le vecteur grad $F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$ est différent de 0, alors au voisinage de M l'ensemble S est une surface et (4) est l'*équation implicite de cette surface.*

528. Dans le plan xOz on donne une ligne $x = f(u)$, $z = g(u)$ ne coupant pas l'axe Oz. Trouver une représentation paramétrique de la surface de révolution de cette ligne autour de l'axe Oz.

529. Equations du *tore* obtenu par rotation du cercle

$$x = a + b \cos u, \quad y = 0, \quad z = b \sin u \quad (b < a)$$

autour de l'axe Oz.

530. Equations de la *caténoïde* obtenue par rotation de la chaînette $x = a \operatorname{ch}(u/a)$, $y = 0$, $z = u$ autour de l'axe Oz.

531. Equations de la *pseudosphère* obtenue par rotation de la tractrice $x = a \sin u$, $y = 0$, $z = a (\ln \operatorname{tg} (u/2) + \cos u)$ autour de l'axe Oz.

532. Equations paramétriques du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

en prenant pour lignes de coordonnées ses génératrices rectilignes. Comment se transforment ces équations si celle de la surface est $z = pxy$?

533. Equations paramétriques de la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et la directrice définie par les équations $x = f (u)$, $y = \varphi (u)$, $z = 0$.

534. Equations paramétriques des cylindres hyperbolique et parabolique.

535. Equation de la surface cylindrique dont la directrice est la ligne $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho} (u)$ et les génératrices sont parallèles à un vecteur $\boldsymbol{e}$.

536. Equations paramétriques de la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles au vecteur $\boldsymbol{a}$ (1, 2, 3) et la directrice définie par les équations $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

537. Equation implicite de la surface cylindrique dont la directrice est la ligne $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = 0$ et les génératrices des droites, parallèles au vecteur $\boldsymbol{a}$ (—1, 3, —2).

538. Montrer que l'équation de la surface cylindrique dont les directrices sont parallèles au vecteur $\boldsymbol{a}$ (l, m, n) est de la forme $f (nx - lz, ny - mz) = 0$.

539. Trouver l'équation de la surface cylindrique dont la directrice est la ligne $x^2 + y^2 = ay$, $z = 0$ et les génératrices, parallèles au vecteur $\boldsymbol{a}$ (l, m, n).

540. Soit donnée la surface

$$x = 3u + v^2 + 1, \quad y = 2u + v^2 - 1, \quad z = -u + 2v.$$

a) Montrer que cette surface est cylindrique.

b) Former l'équation d'une de ses lignes directrices.

c) Trouver la génératrice rectiligne qui passe par le point M $(u = 2, v = 3)$.

541. Soient donnés un point M (a, b, c) et une ligne L

$$x = f (u), \quad y = \varphi (u), \quad z = \psi (u).$$

On demande les équations paramétriques et implicite du cône de sommet M et de directrice la ligne L.

542. Equation du cône formé par les droites passant par un point M (a, b, c) et coupant la parabole $y^2 = 2px$, $z = 0$.

543. On demande l'équation du cône de sommet M (—1, 0, 0) circonscrit au paraboloïde $2y^2 + z^2 = 4x$.

544. Soit la surface $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$. Vérifier si les points A (4, 2, 3), B (1, 4, —2) appartiennent à cette surface.

545. On demande la surface définie par les équations

$$x = u + \sin v, \quad y = u + \cos v, \quad z = u + a.$$

546. Trouver l'équation implicite de la surface définie par les équations paramétriques

$$x = x_0 + a \cos u \cos v, \quad y = y_0 + b \cos u \sin v,$$
$$z = z_0 + c \sin u.$$

547. Montrer que les équations

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2+v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2+v^2}$$

et

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2$$

définissent la même surface.

548. Quelle est la signification géométrique des paramètres u et v dans l'équation du cône $r = ue(v)$, $|e| = |e'| = 1$?

549-551. Nature des lignes de coordonnées du plan :

(549) $x = u, \quad y = v, \quad z = 0.$

(550) $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = 0.$

(551) $x = \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = \sin u \operatorname{sh} v, \quad z = 0.$

552. Montrer que les équations paramétriques de l'hyperboloïde à une nappe peuvent être de la forme

$$x = a\frac{uv+1}{u+v}, \quad y = b\frac{u-v}{u+v}, \quad z = \frac{uv-1}{u+v}.$$

Quelle est la forme des lignes de coordonnées dans cette représentation paramétrique ?

553. Former les équations paramétriques d'un cylindre circulaire ayant pour lignes de coordonnées: a) des hélices et des cercles; b) des hélices et des génératrices rectilignes; c) deux familles d'hélices.

554. Equations paramétriques de la figure engendrée par les tangentes à une ligne donnée $\rho = \rho(u)$.

555. Equations paramétriques de la figure engendrée par les tangentes á l'hélice

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bu.$$

Cette figure est-elle une surface ?

556. Un *hélicoïde générique* est la surface engendrée par une ligne (dite profil) en mouvement de rotation autour d'un axe et en même temps de translation parallèlement à cet axe, les vitesses de ces mouvements étant proportionnelles. On demande les équations de l'hélicoïde générique.

557. Un *hélicoïde* est *normal* ou *oblique* selon que son profil est une droite perpendiculaire ou non à l'axe de rotation. On demande les équations de ces hélicoïdes, l'axe de rotation étant l'axe Oz.

558. Trouver l'équation de la surface engendrée par les normales principales d'une hélice.

559. On appelle *conoïde droit* la surface engendrée par une droite en mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire et en même temps en mouvement de translation le long de cet axe. On demande l'équation du conoïde dont l'axe de rotation est l'axe Oz.

560. Former l'équation implicite d'un conoïde droite dont le mouvement de translation le long de l'axe Oz est défini par l'équation $z = a \sin 2v$, où v est la vitesse angulaire de rotation de la droite.

561. Former les équations paramétriques de la surface $x^2z^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Montrer que c'est un conoïde droit.

562. Equation de la surface engendrée par un cercle de rayon a dont le centre se déplace sur une ligne donnée $\rho = \rho(s)$ pour laquelle le plan contenant le cercle est à chaque instant plan normal. (Une telle surface est dite *tubulaire*.)

563. On appelle *surface de translation* une surface admettant la représentation paramétrique $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{r}_2(v)$, où $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ sont des fonctions vectorielles lisses. Montrer que la surface de translation est engendrée par une ligne en mouvement de translation.

564. Montrer que le lieu géométrique des milieux de segments dont les extrémités appartiennent à deux lignes données est une surface de translation.

565. Montrer que la partie de l'hélicoïde normal

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

qui correspond à $u \leqslant c$ (où c est un nombre positif arbitraire) est une surface de translation.

566. Montrer que les paraboloïdes elliptique et hyperbolique sont des surfaces de translation.

567. Montrer que les coordonnées x, y, z d'un point arbitraire d'une conique peuvent toujours être exprimées par des fonctions rationnelles de deux paramètres u et v.

§ 11. Plan tangent et normale à une surface. Surfaces réglées. Contact d'une ligne et d'une surface

Les équations du plan tangent qui correspondent aux équations (1), (2), (3), (4) § 10 de la surface sont respectivement

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y);$$

où $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(X-x)F_x+(Y-y)F_y+(Z-z)F_z=0;$$

les équations de la normale:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)$$

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}},$$

$$\frac{X-x}{-p}=\frac{Y-y}{-q}=\frac{Z-z}{1}, \quad \frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}=\frac{Z-z}{F_z}.$$

On dit qu'une surface est *réglée* si elle admet une représentation paramétrique de la forme $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{a}(u)$, où $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{a}$ sont des fonctions vectorielles lisses. La ligne de coordonnée $u=$ const est une droite ou un intervalle de droite et s'appelle *génératrice.* La ligne $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ s'appelle *directrice.* On dit qu'une surface réglée est *développable* si toutes les tangentes à une génératrice arbitraire sont contenues dans le même plan tangent à la surface. Une surface réglée qui n'est pas développable est dite *gauche.*

Soient M un point d'une surface réglée S, $\pi=\pi(u)$, la génératrice qui passe par le point M. En donnant au paramètre u un accroissement Δu on obtient une génératrice rectiligne $\pi'=\pi'(u+\Delta u)$. Soit NN' la perpendiculaire commune aux droites π et π'. Lorsque $\Delta u\to 0$, le point N tend le long de la droite π vers un point limite appelé *point de striction* de la génératrice π. L'ensemble de tous les points de striction de la surface réglée S forme une ligne appelée *ligne de striction.* L'équation de la ligne de striction de la surface réglée est

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(u)-\frac{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{a}}{(d\boldsymbol{a})^2}\boldsymbol{a}(u).$$

Supposons que la courbe

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \tag{1}$$

et la surface

$$F(x, y, z)=0 \tag{2}$$

ont un point commun $M(t_0)$. Considérons la fonction

$$\Phi(t)=F(x(t), y(t), z(t)).$$

Lorsque le point $M(t)$ tend vers $M(t_0)$ en décrivant la courbe (1), la fonction $\Phi(t)$ est un infiniment petit pour $t\to t_0$. Si l'ordre de petitesse de $\Phi(t)$ par rapport à $t-t_0$ est égal à $k+1$, on dit que la courbe (1) présente un *contact d'ordre k* avec la surface (2).

568. Montrer que si une droite contenue dans une surface passe par un point M de cette surface, alors elle est contenue dans le plan tangent en M à cette surface.

569. Sur la surface $x = u + \cos v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda u$, on donne le point M ($u = 1$, $v = \pi/2$).

a) Former les équations des tangentes et des plans normaux aux lignes $u = 1$, $v = \pi/2$ en M.

b) Trouver l'angle des lignes $u = 1$, $v = \pi/2$.

c) Montrer que la ligne $u = \sin v$ et la ligne $u = 1$ admettent une tangente commune en M.

570. Montrer que la normale à la surface engendrée par les tangentes à une hélice fait un angle constant avec l'axe de cette hélice.

571. Former l'équation du plan tangent à la surface $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ en M (3, 5, 7).

572. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ en M ($u = 2$, $v = 1$).

573. Former les équations du plan tangent et de la normale en M (1, 3, 4) à la surface $x = u$, $y = u^2 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$.

574. Soit donnée la surface $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$. Former les équations du plan tangent, de la normale à la surface et de la tangente à la ligne $u = 2$ au point M ($u = 2$, $v = \pi/4$).

575-578. Former les équations du plan tangent et de la normale aux surfaces suivantes:

(575) $z = x^3 + y^3$ en M (1, 2, 9).

(576) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ en M (3, 4, 12).

(577) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ en M (3, 1, −1).

(578) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en M (x_0, y_0, z_0).

579. Former l'équation du plan tangent à la pseudo-sphère

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v,$$
$$z = a (\ln \operatorname{tg} (u/2) + \cos u).$$

580. Former les équations du plan tangent et de la normale à l'hélicoïde normal

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

Comportement de la normale lorsqu'elle se déplace le long des lignes de coordonnées.

581. Equation du plan tangent au tore

$$x = (7 + 5 \cos u) \cos v, \quad y = (7 + 5 \cos u) \sin v,$$
$$z = 5 \sin u$$

au point M (u, v) pour lequel

$$\cos u = 3/5, \quad \cos u = 4/5 \quad (0 < u, v < \pi/2).$$

582. Tracer la tangente à la surface $xyz = 1$, qui est parallèle au plan $x + y + z - 3 = 0$.

583. Montrer que les plans tangents à la surface $xyz = a^3$ forment avec les plans de coordonnées un tétraèdre de volume constant.

584. Montrer que tout plan tangent au cône passe par le sommet.

585. Montrer que les plans tangents à la surface $z = x^3 + y^3$ aux points M $(\alpha, -\alpha, 0)$ forment un faisceau.

586. Trouver les points du tore

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v,$$

$$z = b \sin u,$$

où la normale est perpendiculaire au plan $Ax + By + Cz + D = 0$.

587. Soient donnés une surface $x^n + y^n + z^n - d^n = 0$ et un point M (a, b, c) sur cette surface (a, b, c et d sont positifs). Montrer que si A, B et C sont les points d'intersection du plan tangent en M avec les axes Ox, Oy, Oz, alors $\frac{a}{|OA|} + \frac{b}{|OB|} + \frac{c}{|OC|} = 1$.

588. Montrer que le plan tangent à la surface $f(x - az, y - bz) = 0$ en un point quelconque est parallèle à une direction fixe.

589. Montrer que le plan tangent à une surface tubulaire (voir exercice 562) est parallèle à une tangente à la ligne directrice, et que les normales à cette surface sont les normales de la directrice.

590. Montrer que les plans tangents à la surface

$$z = x\varphi(y/x)$$

passent par l'origine des coordonnées.

591. Montrer que les plans tangents à la surface de translation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{r}_2(v)$ le long d'une ligne $u = \text{const}$ ou $v = \text{const}$ sont parallèles à une droite.

592. On dit qu'une surface S' est *parallèle* à une surface S si elle est engendrée par les extrémités des segments de longueur constante de normales à S. On conviendra d'appeler les extrémités de ces segments points associés de S et de S'.

Montrer que : a) les plans tangents à S et S' en des points associés sont parallèles.

b) la propriété de parallélisme est réflexive (c'est-à-dire que si S' est parallèle à S, alors S est aussi parallèle à S').

593. Supposons qu'une surface est la partie de la figure engendrée par les tangentes à une ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Former l'équation d'un plan tangent à cette surface. Etudier le comportement de ce plan lorsque le point de contact décrit des génératrices rectilignes.

594. Montrer que les surfaces $z = \operatorname{tg}(xy)$, $x^2 - y^2 = a$ sont orthogonales en leurs points d'intersection.

595-597. Montrer que les familles de surfaces suivantes sont deux à deux orthogonales (λ, μ, ν sont les paramètres des familles) :

(595) $4x + y^2 + z^2 = \lambda, \quad y = \mu z, \quad y^2 + z^2 = \nu e^x.$

(596) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mu y,$
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu z.$

(597) $xy = \lambda z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mu, \quad x^2 + y^2 + z^2 =$
$= \nu (x^2 - y^2).$

598. Montrer que le plan tangent à la surface $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = f(v) + au$ en un point quelconque de la ligne $v = c$ passe par une droite fixe.

599. Montrer que si toutes les normales a une surface sont concourantes, alors cette surface est une sphère ou un domaine d'une sphère.

600. Montrer que la normale à une surface de révolution est confondue avec la normale principale de la méridienne et coupe l'axe de rotation.

601. Montrer que si toutes les normales à une surface coupent une même droite, cette surface est une surface de révolution.

602. Montrer que la surface réglée $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{a}(u)$ est développable si et seulement si

$$\boldsymbol{r}'\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}' = 0.$$

603. Montrer qu'une surface parallèle à une développable est une développable.

604. Montrer que toute surface développable peut être décomposée en

a) une partie de surface;
b) une partie de cylindre;
c) une partie de cône;
d) une partie d'une figure engendrée par les tangentes à une ligne gauche. Cette figure s'appelle *arête de rebroussement*.

605. Soit S une surface développable du type d) de l'exercice **604**. Montrer que le plan tangent à S en un point M est confondu avec le plan osculateur à l'arête de rebroussement en M.

606. On appelle *surface de Catalan* une surface réglée gauche dont les génératrices sont parallèles à un plan appelé *plan directeur*. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface réglée

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{a}(u)$$

soit une surface de Catalan est que

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}'' = 0, \quad \boldsymbol{a}'' \neq \boldsymbol{o}.$$

607-610. Trouver la ligne de striction des surfaces suivantes:
(607) L'hélicoïde normal.
(608) L'hyperboloïde de révolution à une nappe.
(609) La surface engendrée par les binormales à une ligne gauche.
(610) La surface engendrée par les normales principales à une ligne gauche.

611. Montrer que la surface engendrée par les normales à une surface réglée gauche aux points d'une génératrice est un paraboloïde hyperbolique ou une partie de paraboloïde hyperbolique.

612. Montrer que la ligne $yz = x$, $xz = y + 1$ et la surface $z = xy$ présente un contact d'ordre 2 au point M (0, —1, 0).

613. De quel ordre est le contact de la ligne

$$x = t^3, \quad y = t^3 + 2t, \quad z = t^2$$

et de la surface

$$x^2 + y^2 = x (y + z)$$

en l'origine des coordonnées.

614. Montrer qu'une droite présentant un contact d'ordre $\geqslant 2$ avec une quadrique est entièrement située sur cette quadrique.

615. Montrer qu'une ligne est plane si en chacun de ses points elle présente un contact d'ordre $\geqslant 3$ avec le plan osculateur.

616. Supposons qu'une ligne L et une surface S présentent un contact d'ordre n en un point M_0. Montrer que la projection L' de L sur S parallèlement à une direction non contenue dans le plan tangent à S en M_0 présente avec la ligne L un contact d'ordre n en M_0.

§ 12. Famille de surfaces. Enveloppe

Soit

$$F (x, y, z) = C \tag{1}$$

l'équation d'une famille de surfaces à un paramètre. L'ensemble de tous les points vérifiant le système d'équations

$$F (x, y, z, C) = 0, \quad \partial_C F (x, y, z, C) = 0 \tag{2}$$

s'appelle *discriminant* de la famille (1).

On appelle *enveloppe* de la famille (1) la surface qui en chacun de ses points est tangente à une surface de la famille (c'est-à-dire qu'elle a un point et un plan tangent en commun avec cette surface). La partie du discriminant qui est une surface est une enveloppe. Les points de contact de l'enveloppe de la famille (1) avec une surface fixée de la famille forment dans le cas général une ligne appelée *caractéristique* et définie par le système (2) pour la valeur de C correspondant à la surface considérée.

L'ensemble des points vérifiant le système d'équations

$$F (x, y, z, C) = 0, \quad \partial_C F (x, y, z, C) = 0,$$
$$\partial^2_{CC} F (x, y, z, C) = 0$$

s'appelle *arête de rebroussement de l'enveloppe*. Si la famille de caractéristiques possède une enveloppe, celle-ci appartient à l'arête de rebroussement.

Soit

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \qquad (3)$$

l'équation d'une famille de surfaces à deux paramètres. L'ensemble des solutions du système

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad \partial_{C} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0,$$
$$\partial_{C_2} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

s'appelle *discriminant* de la famille (3). L'*enveloppe* de la famille (3) se définit comme plus haut.

617-619. Trouver l'enveloppe de la famille de surfaces:

(617) $x^2 + y^2 + (z - C)^2 - 1 = 0$.

(618) $x + C^2y + z - 2C = 0$.

(619) $(x - C)^2 + (y - C)^2 + (z - C)^2 - C^2 = 0 \quad (C \neq 0)$.

620. Citer un exemple de famille de surfaces dont le discriminant est une ligne.

621. Citer un exemple de famille de surfaces dont le discriminant est un point.

622. Trouver l'enveloppe et les caractéristiques de la famille de sphères

$$(x - C)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Existe-t-il une arête de rebroussement de l'enveloppe?

623. Trouver l'enveloppe des sphères dont les diamètres sont les cordes de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

parallèles aux axes de symétrie. Même question pour l'hyperbole.

624. Trouver l'arête de rebroussement de l'enveloppe de la famille de plans

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + z = b\alpha,$$

où $b = \text{const}$, α est un paramètre.

625. Trouver l'enveloppe d'une famille de plans formant chacun un tétraèdre de volume V donné avec les plans de coordonnées.

626. Former l'équation d'une famille de sphères dont l'enveloppe est le cône épointé

$$x^2 + y^2 = a^2z^2 \quad (z \neq 0).$$

627. Trouver l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon constant dont les centres sont situés sur une ligne donnée $\rho = \rho(s)$ (*surface tubulaire*).

628. Trouver l'enveloppe, les caractéristiques et l'arête de rebroussement d'une famille de sphères de rayon a dont les centres sont situés sur le cercle

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad z = 0.$$

629. Trouver l'enveloppe, les caractéristiques et l'arête de rebroussement de la famille de surfaces

$$[(x - C)^2 + (y - R)^2 + z^2 - R^2] \times$$
$$\times [(x - C)^2 + (u + R)^2 + z^2 - R^2] = 0 \quad (y^2 + z^2 \neq 0).$$

630. Trouver l'enveloppe des plans osculateurs à une ligne gauche et ses caractéristiques. Existe-t-il une arête de rebroussement de l'enveloppe?

631. Trouver l'enveloppe des plans normaux à une ligne gauche, ses caractéristiques et l'arête de rebroussement.

632. Trouver l'enveloppe des plans rectifiants d'une ligne gauche, ses caractéristiques et l'arête de rebroussement.

633. Trouver l'enveloppe d'une famille de cônes circulaires identiques (d'angle de section axiale égal à 2α) de sommet en l'origine des coordonnées et tangents au plan $z = 0$.

634. Montrer que les surfaces développables et elles seules sont les enveloppes d'une famille de plans à un paramètre.

635. Une surface développable σ est coupée par une famille de plans parallèles. Montrer que les développées des sections sont situées aussi sur une surface développable.

636. Trouver l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon constant a dont les centres sont situés sur le plan $z = 0$.

637. Montrer que si les points de contact de tous les plans tangents à une surface sont situés sur des lignes, alors ces lignes sont des droites ou des segments de droite.

638. Trouver l'enveloppe d'une famille de plans dont la somme des distances à n points fixes est constante.

§ 13. Première forme quadratique

On appelle *première forme fondamentale* φ_1 *d'une surface* S de $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire induit sur chaque espace vectoriel tangent à S par le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$. Donc, à tout couple $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}$ de vecteurs tangents à la surface (en un même point) la forme φ_1 associe le nombre $\varphi_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{p}$. La forme quadratique correspondant à φ_1 s'appelle *première forme quadratique* et se note ds^2 (ou encore φ_1). La donnée de la forme bilinéaire φ_1 équivaut à la donnée de la forme quadratique ds^2. Pour un vecteur $\boldsymbol{h}$ tangent à la surface on a $ds^2(\boldsymbol{h}) = \varphi_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} = |\boldsymbol{h}|^2$. Si $(U, \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de la surface, $\partial_u \boldsymbol{r}$, $\partial_v \boldsymbol{r}$, une base mobile, alors les fonctions

$$E(u, v) = \partial_u \boldsymbol{r}(u, v)\cdot\partial_u \boldsymbol{r}(u, v),$$
$$F(u, v) = \partial_u \boldsymbol{r}(u, v)\cdot\partial_v \boldsymbol{r}(u, v),$$
$$G(u, v) = \partial_v \boldsymbol{r}(u, v)\cdot\partial_v \boldsymbol{r}(u, v)$$

sont appelées *coefficients de la première forme quadratique (fondamentale)*. Si $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{p}$ sont des vecteurs tangents à la surface au point $\boldsymbol{r}(u, v)$, et

$$\boldsymbol{h} = h_1 \partial_u \boldsymbol{r}(u, v) + h_2 \partial_v \boldsymbol{r}(u, v),$$
$$\boldsymbol{p} = p_1 \partial_u \boldsymbol{r}(u, v) + p_2 \partial_v \boldsymbol{r}(u, v)$$

(c'est-à-dire que (h_1, h_2) et (p_1, p_2) sont les coordonnées des vecteurs $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{p}$ dans le repère mobile, alors

$$ds^2(\boldsymbol{h}) = E(u, v)\, h_1^2 + 2F(u, v)\, h_1 h_2 + G(u, v)\, h_2^2,$$
$$\varphi_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}) = E(u, v)\, h_1 p_1 + F(u, v)\,(h_1 p_2 + h_2 p_1) + G(u, v)\, h_2 p_2.$$

On note souvent ds^2 par

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

où $du(\boldsymbol{h}) = h_1$, $dv(\boldsymbol{h}) = h_2$.

Si une ligne d'une surface est donnée par les équations intrinsèques $u = u(t)$, $v = v(t)$, alors la longueur d'arc de cette ligne se calcule par la formule

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))\, u'(t)\, v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2}\, dt.$$

Si φ est l'angle de deux lignes d'une surface (définies par les équations intrinsèques $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ et $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$) en un point commun de coordonnées curvilignes $(u_0, v_0) = (u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(t_0), v_2(t_0))$, alors

$$\cos\varphi = \frac{1}{d_1 d_2}\big(E(u_0, v_0)\, u_1'(t_0)\, u_2'(t_0) + F(u_0, v_0)\,(u_1'(t_0)\, v_2'(t_0) + u_2'(t_0)\, v_1'(t_0)) + G(u_0, v_0)\, v_1'(t_0)\, v_2'(t_0)\big),$$

où

$$d_1 = \sqrt{E(u_0, v_0)(u_1'(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0)\, u_1'(t_0)\, v_1'(t_0) + G(u_0, v_0)(v_1'(t_0))^2},$$
$$d_2 = \sqrt{E(u_0, v_0)(u_2'(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0)\, u_2'(t_0)\, v_2'(t_0) + G(u_0, v_0)(v_2'(t_0))^2}.$$

L'aire σ d'un domaine fermé D d'une surface, image d'un domaine fermé D' par la fonction vectorielle $\boldsymbol{r}$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{r}(D') = D$) est donnée par

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Un difféomorphisme f d'une surface S sur une surface Q est une *isométrie* s'il conserve les distances, c'est-à-dire que la longueur d'arc de toute ligne de S comprise entre des points M et N est égale à la longueur d'arc de la ligne $f(l)$ de Q compris entre les images de M et de N. On dit qu'une surface S est *applicable* sur une surface Q

si pour tout point $M \in S$ il existe une isométrie d'un voisinage W de M sur une partie de la surface Q.

On dit qu'un difféomorphisme f d'une surface S sur une surface Q est une *application conforme* si l'angle de deux lignes quelconques de S est égal à l'angle de leurs images sur Q.

Soient (U, r_1) et (U, r_2) des représentations paramétriques des surfaces S et Q respectivement,

$$f: r_1(U) \to r_2(U), \quad r_1(u, v) \mapsto r_2(u, v)$$

une application associant les points de mêmes coordonnées curvilignes. L'application f est une isométrie (conforme) si et seulement si les coefficients des premières formes quadratiques de S et de Q correspondant aux représentations paramétriques indiquées sont confondues (resp. proportionnelles).

639-649. Trouver la première forme quadratique des surfaces de révolution suivantes:

(639) La surface de révolution autour de Oz: $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \sin v$, $z = g(u)$.

(640) La sphère: $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \sin v$, $z = R \sin u$.

(641) L'ellipsoïde de révolution: $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \sin v$, $z = c \sin u$.

(642) L'hyperboloïde de révolution à une nappe: $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \sin v$, $z = c \operatorname{sh} u$.

(643) L'hyperboloïde de révolution à deux nappes: $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \sin v$, $z = c \operatorname{ch} u$.

(644) Le paraboloïde de révolution: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

(645) Le cylindre circulaire: $x = R \cos v$, $y = R \sin v$, $z = u$.

(646) Le cône circulaire épointé: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = ku$ $(u \neq 0)$.

(647) Le tore: $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$, $z = b \sin u$.

(648) La caténoïde: $x = a \operatorname{ch}(u/a) \cos v$, $y = a \operatorname{ch}(u/a) \sin v$, $z = u$.

(649) La pseudo-sphère: $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a (\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ $(u \neq \pi/2)$.

650. Trouver la première forme quadratique de l'hélicoïde normal $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

651. Trouver la première forme quadratique de l'hélicoïde $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = f(u) + av$.

652. Trouver la première forme quadratique d'une surface S sachant que S est une partie de la figure engendrée par:

a) les tangentes,

b) les normales principales,

c) les binormales à une ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, où u est un paramètre naturel.

653. Trouver la première forme quadratique de la surface

$$z = z(x, y).$$

654. Indiquer les formes quadratiques qui ne peuvent être des formes quadratiques premières pour une surface:

a) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + dv^2$;
b) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + 4dv^2$;
c) $ds^2 = du^2 - 4du\,dv + 6dv^2$;
d) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv - 2dv^2$.

655. Trouver les formules de transformation des coefficients de la première forme quadratique et de l'expression

$$H = \sqrt{EG - F^2}$$

lorsqu'on passe à un nouveau système de coordonnées curvilignes.

656. Montrer que la première forme quadratique d'une surface de révolution peut être écrite sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2$$

dans un système de coordonnées curvilignes convenable.

657. On dit qu'un réseau de coordonnées de lignes sur une surface est de *Tchébychev* si les segments de lignes de coordonnées d'une famille compris entre deux lignes de l'autre famille sont égaux. Montrer qu'un réseau de lignes de coordonnées sur une surface est de Tchébychev si et seulement si $\partial_v E = 0$, $\partial_v G = 0$.

658. La première forme quadratique d'une surface est de la forme

$$ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + dv^2.$$

Que peut-on dire des coordonnées curvilignes?

659. Réduire la première forme quadratique de la sphère, du tore, de la caténoïde et de la pseudo-sphère à la forme

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + \tilde{G}(\tilde{u})\,d\tilde{v}^2.$$

660. On dit qu'un système de coordonnées curvilignes sur une surface est *isotherme* si la première forme quadratique s'y écrit:

$$ds^2 = A(u, v)\,(du^2 + dv^2).$$

Trouver les coordonnées isothermes sur une pseudo-sphère.

661. Trouver l'angle des génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique $z = axy$.

662. Montrer que les aires des domaines des paraboloïdes $z = a(x^2 + y^2)/2$ et $z = axy$, qui se projettent sur un même domaine du plan xOy, sont égales.

663. Former les équations des lignes qui rencontrent les méridiennes d'une surface de révolution sous un angle constant α (les *loxodromies*).

664. Trouver l'équation des loxodromies de la sphère.

665. Montrer que si une famille de lignes sur une surface est définie par l'équation différentielle $A\,du + B\,dv = 0$, alors l'équation des trajectoires orthogonales, c'est-à-dire des lignes faisant un angle droit avec les lignes données, s'écrit

$$(BE - AF)\,du + (BF - AG)\,dv = 0.$$

666. Trouver les trajectoires orthogonales aux génératrices rectilignes du cône.

667. Trouver les trajectoires aux génératrices rectilignes d'une surface S, partie d'une figure engendrée par les tangentes à une ligne.

668. Former l'équation différentielle des lignes rencontrant les génératrices rectilignes de la surface S de l'exercice 667 sous un angle constant α.

669. Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales à une famille de lignes $\varphi(u, v) = \text{const}$ sur une surface.

670. Trouver les trajectoires orthogonales à la famille de lignes $u + v = \text{const}$ sur la sphère

$$x = R\cos u\cos v,\quad y = R\cos u\sin v,\quad z = R\sin u.$$

671. Trouver les trajectoires orthogonales à la famille de lignes $u = Ce^v$ sur l'hélicoïde oblique $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$.

672. Trouver la famille de trajectoires orthogonales à la famille de lignes $v = u^2 + \alpha$, où α est un paramètre, sur le cône circulaire $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$.

673. Former les équations de l'hélicoïde oblique $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$ rapportées aux lignes $v = \text{const}$ et à leurs trajectoires orthogonales.

674. Définir la condition d'orthogonalité de deux familles de lignes sur une surface définies par l'équation différentielle

$$P(u, v)\,du^2 + Q(u, v)\,du\,dv + R(u, v)\,dv^2 = 0.$$

675. Montrer que l'équation différentielle

$$du^2 - (u^2 + a^2)\,dv^2 = 0$$

définit un réseau orthogonal sur l'hélicoïde normal $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$.

676. Trouver les trajectoires orthogonales aux génératrices rectilignes de la surface $z = axy$.

677. Montrer que les lignes qui en chacun de leur point sont bissectrices de l'angle des lignes de coordonnées sont définies par les

équations différentielles

$$\sqrt{E}\,du \pm \sqrt{G}\,dv = 0.$$

678. Trouver les équations des lignes de l'hélicoïde normal $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, qui sont bissectrices des angles des lignes de coordonnées.

679. Trouver les équations des lignes de la sphère $x = a\cos u \times \times \sin v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\cos v$, qui sont bissectrices des angles des parallèles et des méridiennes.

680. Trouver les équations des lignes qui sont bissectrices des angles des génératrices rectilignes en chaque point de la surface $z = axy$.

681. Soit donnée la surface

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = uv \quad (|u| + |v| \neq 0).$$

a) Trouver la première forme quadratique.

b) Calculer la différentielle de la longueur d'arc des lignes $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.

c) Calculer la longueur d'arc de la ligne $v = au$ comprise entre ses points d'intersection avec les lignes $u = 1$, $u = 2$.

682. Trouver l'angle des lignes $u + v = 0$, $u - v = 0$ de l'hélicoïde normal $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$.

683. Trouver le périmètre et les angles intérieurs du triangle curviligne $u = \pm av^2/2$, $v = 1$, situé sur une surface telle que

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

684. Trouver la longueur d'arc de la ligne $u = v$, compris entre les points $M_1(u_1, v_1)$ et $M_2(u_2, v_2)$ d'une surface dont la première forme quadratique est

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\,dv^2.$$

685. Trouver l'angle des lignes $v = 2u$ et $v = -2u$ d'une surface dont la première forme quadratique est

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

686. Trouver l'angle des lignes $v = u + 1$ et $v = 3 - u$ de la surface $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$.

687. Soient données les lignes

$$v = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$

sur l'hélicoïde normal $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$.

Calculer les longueurs d'arcs de ces lignes compris entre les points $M_1(u_1, v_1)$ et $M_2(u_2, v_2)$.

688. Soient données deux familles de lignes

$$v = \pm a \ln \operatorname{tg}(u/2) + C$$

sur la pseudo-sphère

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v,$$
$$z = a (\ln \operatorname{tg} (u/2) + \cos u).$$

Calculer la longueur d'arc de la ligne de chaque famille, compris entre les points $M_1 (u_1, v_1)$ et $M_2 (u_2, v_2)$.

Montrer que les longueurs d'arc de toutes les lignes d'une famille comprises entre deux lignes fixes de l'autre famille sont égales.

689. Soit donné sur une sphère un triangle rectangle dont les côtés sont des arcs de grands cercles. Trouver: a) une relation entre les côtés du triangle; b) l'aire de ce triangle.

690. Trouver l'aire du quadrilatère limité par les lignes $u = 0$, $u = a$, $v = 0$ et $v = 1$ de l'hélicoïde normal $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

691. Trouver l'aire du triangle curviligne limité par les lignes $u = \pm av$ et $v = 1$ de la surface dont la première forme quadratique est

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

692. Trouver l'aire du domaine sphérique convexe limité par la fenêtre de Viviani.

693. On appelle *onglet sphérique* la portion de sphère limitée par deux demi-cercles de diamètre commun. Trouver l'aire S d'un onglet sphérique d'angle au sommet φ_0.

694. Montrer que toute surface cylindrique est applicable sur un plan.

695. Montrer que toute surface conique est applicable sur un plan.

696. Montrer que la portion de figure engendrée par les tangentes à une ligne est une surface applicable sur un plan.

697. Montrer que l'hélicoïde normal est applicable sur une caténoïde.

698. On appelle *surface de Liouville* une surface dont la première forme quadratique est réduisible à la forme

$$ds^2 = (f (u) + g (v)) (du^2 + dv^2).$$

Montrer que la surface applicable sur une surface de révolution est une surface de Liouville.

699. Montrer que toute surface de révolution peut être appliquée sur un plan par une application localement conforme.

700. On dit qu'une application est *équiaréale* si les domaines homologues ont des aires égales. Montrer que si une application d'une surface sur une autre est conforme et équiaréale, alors elle est isométrique.

§ 14. Application sphérique, deuxième forme quadratique

Soit S une surface orientée dont l'orientation est déterminée par le champ $\boldsymbol{m}$ des vecteurs unitaires normaux. L'application de la surface S dans la sphère S^2, qui à un point M de S associe un point M' de S^2, de rayon vecteur $\boldsymbol{m}(M)$, s'appelle *application sphérique* (ou *gaussienne*) *de la surface* S. Ceci étant, les espaces tangents $T_M S$ et $T_{M'} S^2$ peuvent être identifiés par identification des vecteurs tangents $(M, \boldsymbol{h})$ et $(M', \boldsymbol{h})$. L'application sphérique est lisse et sa différentielle en M, traitée comme une application linéaire de l'espace $T_M S$, s'appelle *opérateur principal de la surface* (en M) et se note $\mathscr{A}$. L'opérateur principal permet de définir sur chaque espace vectoriel tangent à S une forme bilinéaire symétrique φ_2, appelée *deuxième forme fondamentale*, comme suit: $\varphi_2(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}) = -\mathscr{A}(\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{h}\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{p})$. La forme quadratique correspondant à φ_2 s'appelle *deuxième forme quadratique* de la surface et se note également φ_2. Si $(U, \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de S et

$$\boldsymbol{m} = \frac{\partial_u \boldsymbol{r} \times \partial_v \boldsymbol{r}}{|\partial_u \boldsymbol{r} \times \partial_v \boldsymbol{r}|},$$

alors

$$\mathscr{A}(\partial_u \boldsymbol{r}) = \partial_u \boldsymbol{m}, \quad \mathscr{A}(\partial_v \boldsymbol{r}) = \partial_v \boldsymbol{m}$$

et pour les vecteurs tangents $\boldsymbol{h} = \partial_u \boldsymbol{r}\, h_1 + \partial_v \boldsymbol{r}\, h_2$ et $\boldsymbol{p} = \partial_u \boldsymbol{r}\, p_1 + \partial_v \boldsymbol{r}\, p_2$ on a

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{h}) = \partial_u \boldsymbol{m}\, h_1 + \partial_v \boldsymbol{m}\, h_2$$

et

$$\varphi_2(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}) = -\partial_u \boldsymbol{m}\cdot\partial_u \boldsymbol{r}\, h_1 p_1 - \partial_u \boldsymbol{m}\cdot\partial_v \boldsymbol{r}\, h_1 p_2 - \partial_v \boldsymbol{m}\cdot\partial_u \boldsymbol{r}\, h_2 p_1 - \partial_v \boldsymbol{m}\cdot\partial_v \boldsymbol{r}\, h_2 p_2.$$

Les fonctions

$$L(u, v) = -\partial_u \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial_u \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial^2_{uu}\boldsymbol{r}(u, v) = \frac{\partial_u \boldsymbol{r}\, \partial_v \boldsymbol{r}\, \partial^2_{uu}\boldsymbol{r}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M(u, v) = -\partial_u \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial_v \boldsymbol{r}(u, v) = -\partial_v \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial_u \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial^2_{uv}\boldsymbol{r}(u, v) = \frac{\partial_u \boldsymbol{r}\, \partial_v \boldsymbol{r}\, \partial^2_{uv}\boldsymbol{r}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N(u, v) = -\partial_v \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial_v \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{m}(u, v)\cdot\partial^2_{vv}\boldsymbol{r}(u, v) = \frac{\partial_u \boldsymbol{r}\, \partial_v \boldsymbol{r}\, \partial^2_{vv}\boldsymbol{r}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

s'appellent *coefficients de la deuxième forme quadratique (fondamentale) de la surface.* On a la formule

$$\varphi_2(h, p) = Lh_1p_1 + M(h_1p_2 + h_2p_1) + Nh_2p_2.$$

La deuxième forme quadratique s'écrit souvent

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Dans la base mobile $(\partial_u r, \partial_v r)$ de la surface, la matrice de l'opérateur principal $\mathcal{A}$ s'écrit

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} FM-GL & FN-GM \\ FL-EM & FM-EN \end{bmatrix}.$$

En tout point de la surface sont définis des valeurs propres (réelles) λ_1, λ_2 de l'opérateur principal $\mathcal{A}$ et des vecteurs propres unitaires deux à deux orthogonaux e_1 et e_2 tels que $\mathcal{A}(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\mathcal{A}(e_2) = \lambda_2 e_2$. Les directions définies sur chaque plan tangent à la surface par les vecteurs e_1 et e_2 sont dites *principales.* Le point de la surface S en lequel l'opérateur principal est nul, c'est-à-dire $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, s'appelle *point méplat.*

Le point en lequel l'opérateur principal est une similitude, c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, s'appelle *point ombilical* (ou *ombilic*).

On appelle *courbure normale* k_n d'une ligne d'une surface en un point M la projection du vecteur de courbure kn de cette ligne en M sur la normale à la surface orientée par le vecteur $m(M)$. Si deux lignes d'une surface possèdent une tangente commune en un point M, alors leurs courbures normales sont confondues en ce point. Donc, la courbure normale en M peut être traitée comme une fonction de la direction dans le plan tangent en M et appelée *courbure normale de la surface dans la direction donnée.* La courbure normale d'une ligne en M est donnée en fonction du vecteur h tangent en M par la formule

$$k_n(h) = \frac{\varphi_2(h)}{\varphi_1(h)}.$$

L'intersection du plan normal à une surface avec cette surface est une ligne appelée *section normale.* La courbure d'une section normale est confondue avec le module de la courbure normale. Entre la courbure k d'une ligne d'une surface et la courbure k_0 de la section normale possédant une tangente commune avec la ligne considérée on a la relation

$$k_0 = k\,|\cos\theta|,$$

où θ est l'angle du vecteur m et du vecteur n de la normale principale à la ligne. Les courbures normales de la surface dans les directions principales s'appellent *courbures normales principales* et sont désignées par k_1 et k_2.

On a

$$k_1 = -\lambda_1, \quad k_2 = -\lambda_2$$

et k_1, k_2 sont les racines de l'équation

$$(EG - F^2)\,k^2 - (EN + GL - 2FM)\,k + LN - M^2 = 0.$$

Si un vecteur tangent $\boldsymbol{h}$ fait un angle φ avec le vecteur $\boldsymbol{e}_1$ de la direction principale, alors

$$k_n(\boldsymbol{h}) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Cette formule s'appelle *formule d'Euler*.

La *courbure totale* (ou *de Gauss*) d'une surface est définie par la formule

$$K = \det \mathcal{A} = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

la *courbure moyenne*, par

$$H = -\frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ \mathcal{A} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}.$$

Si $K > 0$, le point de la surface est dit *elliptique*; si $K < 0$, *hyperbolique*; si $K = 0$, *parabolique*.

Si à partir d'un point M de la surface S on porte sur la tangente à chaque section normale un segment de longueur égale à la racine carrée du rayon de courbure de cette section, on obtient une ligne appelée *indicatrice de Dupin*.

701-714. Trouver les images sur la sphère par l'application sphérique des surfaces suivantes:

(701) La sphère.
(702) L'ellipsoïde.
(703) Le paraboloïde elliptique.
(704) L'hyperboloïde de révolution à une nappe.
(705) L'hyperboloïde de révolution à deux nappes.
(706) Le cylindre elliptique.
(707) Le cylindre parabolique.
(708) Le cylindre hyperbolique.
(709) Le cône circulaire.
(710) La caténoïde.
(711) La pseudo-sphère.
(712) Le tore.
(713) Le cylindre $y = x^3$.
(714) L'hélicoïde normal.

715. Une surface S est une portion de figure engendrée par les tangentes à une courbe gauche $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Montrer que l'image de S par une application sphérique est une courbe de la sphère.

716-726. Trouver la deuxième forme quadratique des surfaces de révolution suivantes:

(716) La surface de révolution autour de l'axe Oz: $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \sin v$, $z = g(u)$.

(717) La sphère: $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \sin v$, $z = R \sin u$.

(718) L'ellipsoïde de révolution: $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \times \sin v$, $z = c \sin u$.

(719) L'hyperboloïde de révolution à une nappe: $x = a \operatorname{ch} u \times \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \sin v$, $z = c \operatorname{sh} u$.

(720) L'hyperboloïde de révolution à deux nappes: $x = a \operatorname{sh} u \times \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \sin v$, $z = c \operatorname{ch} u$.

(721) Le paraboloïde de révolution: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

(722) Le cylindre circulaire: $x = R \cos v$, $y = R \sin v$, $z = u$.

(723) Le cône circulaire épointé: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = ku$ $(u \neq 0)$.

(724) Le tore: $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \times \sin v$, $z = b \sin u$.

(725) La caténoïde: $x = a \operatorname{ch} (u/a) \cos v$, $y = a \operatorname{ch} (u/a) \sin v$, $z = u$.

(726) La pseudo-sphère: $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a (\ln \operatorname{tg} (u/2) + \cos u)$.

727. Trouver la deuxième forme quadratique de l'hélicoïde normal $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

728. Montrer que la deuxième forme quadratique est identiquement nulle dans tout système de coordonnées curvilignes sur une surface.

729. Montrer que si la deuxième forme quadratique de la surface

$$z = f(x, y)$$

est identiquement nulle, alors cette surface est un plan ou une portion de plan.

730. Montrer que les équations de la caténoïde (voir exercice 530) peuvent encore s'écrire:

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v,$$
$$y = \sqrt{u^2 + a^2} \sin v,$$
$$z = a \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right).$$

Trouver la deuxième forme quadratique de la caténoïde pour la représentation paramétrique indiquée et calculer la courbure normale des lignes de coordonnées.

731. Trouver les courbures principales de la surface S engendrée par les tangentes à une courbe gauche.

732. Calculer les courbures principales aux sommets de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

733. Trouver les directions principales et les courbures principales de l'hélicoïde normal $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

734. Montrer que les directions principales de l'hélicoïde normale sont bissectrices des angles que font les directions de la génératrice et d'une hélice.

735. Calculer les courbures principales de la surface $z = xy$ en M (1, 1, 1).

736. Calculer les courbures principales de la surface

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

au point M (0, 0, 0).

737. Montrer que l'une des sections normales principales en tout point de la surface $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = \lambda u$ est une droite.

738. Trouver les courbures des sections normales à la surface $y = x^2/2$:

a) en un point arbitraire;

b) aux points des lignes obtenues en coupant la surface par des plans $z = k$, dans les sens des tangentes aux lignes;

c) au point M (2, 2, 4) dans le sens de la tangente à la ligne $y = x^2/2$, $z = x^2$.

739. Sur la surface $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ on donne un point P ($u = 1$, $v = 1$).

a) Calculer les courbures principales de cette surface au point P.

b) Trouver les équations des tangentes PT_1 et PT_2 aux sections normales principales en P.

c) Calculer la courbure de la section normale en P qui passe par la tangente à la ligne $v = u^2$.

740. Soit donnée la surface

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2} y^2.$$

a) Trouver l'équation de l'indicatrice de Dupin en l'origine des coordonnées.

b) Calculer en l'origine des coordonnées le rayon de courbure de la section normale dont la tangente fait un angle de 45° avec l'axe Ox.

741. Dans le plan tangent en M à une surface on trace n droites faisant entre elles des angles égaux à π/n. Montrer que

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}\right) = H,$$

où $1/r_i$ sont les courbures normales des lignes de la surface tangentes aux droites considérées.

742. Trouver le lieu géométrique des centres de courbure des lignes d'un ellipsoïde de révolution passant par le sommet M de ce dernier.

743. Montrer que les surfaces développables sont caractérisées par le fait que leur courbure totale est nulle en tous les points.

744. Trouver les surfaces dont la deuxième forme quadratique est un carré parfait.

745. Montrer que l'un des principaux rayons de courbure d'une surface de révolution est égal au segment de normale compris entre la surface et l'axe de rotation.

746. Trouver la courbure totale des surfaces des exercices 639-649 sous forme d'un produit des courbures principales (sans calculer les formes quadratiques).

747. Montrer que la rotation d'une parabole autour de la directrice nous donne une surface telle que $|R_1| = 2|R_2|$, où R_1 et R_2 sont les principaux rayons de courbure.

748. Trouver l'expression de la courbure totale d'une surface rapportée aux coordonnées isothermes.

749. Trouver l'expression de la courbure totale d'une surface rapportée aux *coordonnées semi-géodésiques*, c'est-à-dire des coordonnées dans lesquelles la première forme quadratique devient

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2.$$

750. Trouver la courbure totale de la surface dont la première forme quadratique est

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\, dv^2.$$

751. Trouver la courbure totale du paraboloïde

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

752. Montrer que si la première forme quadratique d'une surface est

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega\, du\, dv + dv^2,$$

la courbure totale est donnée par la formule

$$K = \frac{\partial^2_{uv}\omega}{\sin \omega}.$$

753. Trouver la courbure totale de la surface définie par l'équation $F(x, y, z) = 0$.

754. Montrer que la courbure totale de la surface de première forme quadratique

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

est constante.

755. Trouver la courbure totale de la surface S engendrée par les normales principales (resp. binormales) d'une ligne gauche.

756. Trouver les courbures totale et moyenne de l'hélicoïde

normal $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$. Sur quelles lignes la courbure totale est-elle constante?

757. Trouver les courbures totale et moyenne de la surface $z = f(x, y)$.

758. Trouver les courbures totale et moyenne de la surface de révolution $z = f(\rho)$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

759. Trouver la courbure moyenne d'un cylindre circulaire de rayon a.

760. Soit S la surface engendrée par la rotation autour d'un axe l d'une ligne L ne possédant pas de points de courbure nulle. Montrer que S est composée de points elliptiques ou de points hyperboliques selon que L a sa concavité ou sa convexité tournées vers l'axe l.

761. Trouver les points elliptiques, hyperboliques et paraboliques du tore.

762-766. Etudier le caractère des points des surfaces engendrées par la rotation des lignes suivantes:

(762) La sinusoïde $y = \sin x$ ($x \neq k\pi$) autour de l'axe Ox.

(763) La sinusoïde $y = \sin x$ ($x \neq k\pi$) autour de l'axe Oy.

(764) La ligne $y = \ln x$ ($x \neq 1$) autour de l'axe Ox.

(765) La ligne $y = \ln x$ autour de l'axe Oy.

(766) La branche d'hyperbole $xy = 1$ ($x > 0$, $x \neq \sqrt{-B/A}$) autour de la droite $Ax + By = 0$.

767-775. Etudier le caractère des points des quadriques suivantes:

(767) L'ellipsoïde.
(768) L'hyperboloïde à une nappe.
(769) L'hyperboloïde à deux nappes.
(770) Le paraboloïde elliptique.
(771) Le paraboloïde hyperbolique.
(772) Le cylindre elliptique.
(773) Le cylindre parabolique.
(774) Le cylindre hyperbolique.
(775) Le cône épointé.

776. Nature des points de la surface $z = f(u)$, où $u = \sqrt{x^2 - y^2}$.

777. Montrer que tous les points de la surface $x + y = z^3$ sont paraboliques.

778. Montrer que l'unique surface connexe de courbure totale non nulle constituée entièrement de points ombilicaux est la sphère ou une portion de sphère.

779. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'une surface soit point ombilical est que

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

en ce point.

780. Indiquer une méthode de construction géométrique des points ombilicaux d'une surface de révolution.

781. Trouver les points ombilicaux de la surface engendrée par la révolution de la sinusoïde $y = \sin x$ $(x \neq k\pi)$ autour de Ox.

782-786. Trouver les points ombilicaux des surfaces suivantes:

(782) L'ellipsoïde de révolution.

(783) Le paraboloïde de révolution.

(784) Le paraboloïde elliptique.

(785) L'ellipsoïde.

(786) L'hyperboloïde à deux nappes.

787. Montrer que les points ombilicaux de la surface

$$x = \frac{u^2}{2} + v, \quad y = u + \frac{v^2}{2}, \quad z = uv$$

se trouvent sur les lignes

$$u = v, \quad u + v + 1 = 0.$$

788. Montrer que les points ombilicaux sont caractérisés par l'égalité

$$H^2 = K.$$

789. Citer un exemple de surface présentant un seul point méplat.

790. Citer un exemple de surface sur laquelle les points méplats forment une ligne.

791. Montrer que la seule surface à être entièrement constituée de points méplats est le plan ou une portion de plan.

§ 15. Réseaux conjugués et asymptotes

On dit qu'une famille de lignes à un paramètre d'une surface, définie par l'équation

$$f(u, v, C) = 0,$$

est *régulière* si par tout point du domaine considéré il passe une ligne de la famille et une seule. On appelle *réseau de lignes* sur une surface un ensemble de deux familles régulières dont les lignes se coupent et ne sont pas tangentes.

On dit que deux directions, de vecteurs directeurs $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{p}$, dans un plan tangent à une surface sont *conjuguées* si $\varphi_2(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}) = 0$, c'est-à-dire si

$$Lh_1p_1 + M(h_1p_2 + h_2p_1) + Nh_2p_2 = 0,$$

où $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$.

On dit qu'un *réseau de lignes* sur une surface est *conjugué* si en chaque point les vecteurs tangents aux lignes des familles de ce réseau sont conjugués.

La direction définie par un vecteur $\boldsymbol{h}$ est dite *asymptotique* si $\varphi_2(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}) = 0$. La direction asymptotique se caractérise par le fait que la courbure normale de la surface y est nulle. On dit qu'une ligne d'une surface est *asymptotique* si la tangente en chacun de ses

points est de direction asymptotique. Les équations intrinsèques des lignes asymptotiques sont solutions de l'équation différentielle

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

Il n'existe pas de lignes asymptotiques sur une surface composée de points elliptiques. Il passe deux lignes asymptotiques par chaque point d'une surface composée de points hyperboliques. Enfin, par tout point d'une surface constituée de points paraboliques, qui ne sont pas méplats, il passe une ligne asymptotique.

792. On demande les équations différentielles des familles de lignes sur une surface, qui forment un réseau conjugué avec la famille de lignes de coordonnées $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$.

793. Sous quelles conditions deux familles de lignes sur une surface, définies par l'équation différentielle

$$P(u, v)\,du^2 + Q(u, v)\,du\,dv + R(u, v)\,dv^2 = 0,$$

sont-elles conjuguées?

794. Montrer que les lignes $v^2\,du - u^2\,dv^2 = 0$ de l'hélicoïde $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ forment un réseau conjugué.

795. On demande l'équation différentielle de la famille de lignes qui forme un réseau conjugué avec une famille de lignes $\varphi(u, v) = C$ d'une surface.

796. Montrer que les lignes de coordonnées d'une surface de translation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{r}_2(v)$ forment un réseau conjugué.

797. Le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

est coupé par les plans $x + y = C$, où C est une constante arbitraire. Trouver la famille de lignes qui forment un réseau conjugué avec ces sections.

798. Trouver la direction conjuguée de $\boldsymbol{a}(1, -2, 1)$ au point $M(1, 1, 1)$ de la surface $xyz = 1$.

799. Une famille de lignes à un paramètre sur une surface est définie par l'équation différentielle

$$A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv = 0.$$

Trouver l'équation différentielle de la famille de lignes conjuguées.

800. Montrer que sur une surface développable la famille des génératrices rectilignes est conjuguée de toute famille de lignes à un paramètre.

801. Trouver les lignes conjuguées de la famille de lignes $u + v = C$ sur l'hélicoïde oblique $x = u\cos v$, $y = v\sin v$, $z = u + v$.

802. Montrer qu'une ligne d'une surface est une ligne asymptotique si et seulement si elle satisfait l'une des conditions suivantes:

a) chacune de ses tangentes est une direction asymptotique;

b) sa courbure normale est nulle en tout point;

c) en tout point où la courbure est non nulle le plan osculateur à la ligne est confondu avec le plan tangent à la surface.

803. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de coordonnées d'une surface soient des lignes asymptotiques est que $N = L = 0$.

804. Trouver les lignes asymptotiques de la pseudo-sphère. Montrer qu'elles forment un réseau de Tchébychev.

805. Soit l une ligne asymptotique sur une surface Φ. Montrer que les caractéristiques de la famille à un paramètre des plans tangents à Φ le long de l sont confondues avec les tangentes à l.

806. Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface de révolution.

807. Trouver les lignes asymptotiques de la caténoïde $x = \operatorname{ch} u \cos v$, $y = \operatorname{ch} u \sin v$, $z = u$.

808. Etudier les lignes asymptotiques du tore.

809. Trouver les lignes asymptotiques de l'hélicoïde normal.

810. Trouver les lignes asymptotiques de l'hyperboloïde à une nappe.

811. Trouver les lignes asymptotiques de la surface engendrée par une droite mobile parallèlement à xOy qui coupe l'axe Oz et la ligne $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

812. Montrer que la ligne

$$x = \frac{2}{1+t}, \quad y = \frac{2}{1-t}, \quad z = t$$

est une ligne asymptotique de la surface

$$z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

813. Montrer que la ligne gauche l de la surface engendrée par les normales principales à l est une ligne asymptotique.

814. On dit qu'une surface est *minimale* si sa courbure moyenne est identiquement nulle. Montrer que sur une surface minimale le réseau des lignes asymptotiques est orthogonal, c'est-à-dire que les lignes d'une famille sont en tout point orthogonales à celles de l'autre.

815. Montrer que si en un point d'une surface la courbure moyenne est nulle, alors les directions asymptotiques sont deux à deux perpendiculaires.

816. Montrer que toute ligne du plan est asymptotique et inversement que la surface dont toute ligne est asymptotique est un plan ou une portion de plan.

817. Montrer que sur une surface (S') parallèle à une surface (S) les lignes correspondant aux lignes asymptotiques de (S) seront asymptotiques si et seulement si la surface (S) est développable.

818. Montrer qu'une ligne l d'une surface et son image l' par une application sphérique présentent des tangentes perpendiculaires aux points homologues si et seulement si l est une ligne asymptotique.

§ 16. Lignes de courbure

On dit qu'une ligne d'une surface est une *ligne de courbure* si la direction de toute tangente à cette ligne est principale. L'équation intrinsèque de la ligne de courbure se déduit à partir de l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Par tous les points d'une surface, autres que les points méplats ou ombilicaux, il passe deux lignes de courbure orthogonales.

819. Montrer qu'une ligne d'une surface est une ligne de courbure si et seulement si est satisfaite l'une des conditions suivantes:

a) en chacun de ses points la ligne suit la direction principale;

b) la courbure normale est égale à l'une des courbures principales;

c) les normales à la surface le long de la ligne engendrent une surface développable.

820-826. Trouver les lignes de courbure des surfaces suivantes:

(820) Une surface cylindrique.

(821) Une surface conique.

(822) Une surface de révolution.

(823) La surface $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = v$.

(824) Une surface développable.

(825) Un hélicoïde normal.

(826) Un paraboloïde elliptique.

827. Montrer que sur le plan et la sphère toute ligne est une ligne de courbure.

828. Montrer que les lignes de coordonnées d'une surface sont des lignes de courbure si et seulement si $F = M = 0$.

829. Montrer que les lignes de coordonnées de la surface

$$x = 3u - u^3 + 3uv^2, \quad y = v^3 - 3u^2v - 3v, \quad z = 3\,(u^2 - v^2)$$

sont des lignes de courbure.

830. Montrer qu'une génératrice rectiligne d'une surface réglée gauche ne peut être ligne de courbure.

831. Trouver l'enveloppe d'une famille de normales à une surface, menées par les points d'une ligne de courbure.

832. Montrer que dans le domaine des points hyperboliques d'une surface les lignes de courbure sont bissectrices des lignes asymptotiques.

833. Montrer qu'aux lignes de courbure d'une surface S correspondent des lignes de courbure sur une surface parallèle.

834. Sous quelles conditions à un réseau orthogonal d'une surface S correspond un réseau orthogonal sur une surface parallèle?

835. Sous quelle condition une famille de sections circulaires d'un ellipsoïde est-elle une famille de lignes de courbure?

836. Montrer que sur toute surface il existe un seul réseau orthogonal conjugué confondu avec les lignes de courbure de cette surface.

837. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la ligne d'intersection de deux surfaces soit une ligne de courbure pour ces deux surfaces est que ces dernières se coupent sous un angle constant.

838. Montrer que l'image d'une ligne de courbure plane d'une surface par une application sphérique est un cercle.

839. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne l d'une surface S et son image l' par une application sphérique de S possèdent des tangentes parallèles aux points homologues est que l soit une ligne de courbure.

§ 17. Lignes géodésiques

On appelle *géodésique* d'une surface une ligne en tout point de laquelle est satisfaite l'une des conditions suivantes:

a) la ligne de courbure est nulle;

b) la normale à la surface est normale principale de la ligne.

Si le réseau de coordonnées est orthogonal, alors les équations intrinsèques des lignes géodésiques sont solutions du système

$$\left.\begin{aligned} 2E\frac{d^2u}{ds^2}+\partial_u E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_v E\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}-\partial_u G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,\\ 2G\frac{d^2v}{ds^2}-\partial_v E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_u G\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\partial_v G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

En admettant que $dv \neq 0$, on peut remplacer ce système par l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{\partial_v E}{2G}\left(\frac{du}{dv}\right)^3+\left(\frac{\partial_u E}{2E}-\frac{\partial_u G}{G}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2+ \\ +\left(\frac{\partial_v E}{E}-\frac{\partial_v G}{2G}\right)\frac{du}{dv}-\frac{\partial_u G}{2E}=0.$$

Le système (1) nous permet de vérifier si les lignes $v =$ const sont des géodésiques.

Par tout point d'une surface il passe une seule géodésique dans la direction donnée.

On appelle *courbure géodésique* d'une ligne d'une surface en un point donné la longueur de la projection du vecteur de courbure $k\boldsymbol{n}$ de la ligne sur le plan tangent à la surface en ce point.

On appelle *torsion géodésique*, associée à une direction donnée, la torsion de la ligne géodésique passant par cette direction. On dit qu'un système de coordonnées curvilignes est *semi-géodésique* si une famille de lignes de coordonnées est composée de géodésiques et l'autre de lignes orthogonales aux premières et si, de plus, l'une des coordonnées curvilignes est confondue avec la longueur d'arc des coordonnées curvilignes de l'autre famille. Dans un tel système de coordonnées, la première forme quadratique s'écrit

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

840. Montrer qu'une géodésique d'une surface est entièrement caractérisée par l'une des conditions suivantes:

a) En tout point de la ligne où la courbure est différente de zéro, la normale à la surface est normale principale de la ligne.

b) En tout point de la ligne où la courbure est différente de zéro, la normale à la surface est située dans le plan osculateur à la ligne.

c) En tout point de la ligne la courbure géodésique est nulle.

d) En tout point de la ligne la courbure est égale à la valeur absolue de la courbure normale.

e) En tout point de la ligne où la courbure est différente de zéro, le plan rectifiant est confondu avec le plan tangent à la surface.

841. Montrer que toute droite sur une surface est une ligne géodésique.

842. Deux surfaces se touchent suivant une ligne l. Montrer que si l est une ligne géodésique sur une surface, elle le sera sur l'autre.

843. Montrer que l'équation différentielle des lignes géodésiques de la surface $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ peut être représentée sous la forme $N\,dr\,d^2r = 0$, où N est le vecteur de la normale à la surface.

844. Montrer que les droites et elles seules sont les géodésiques du plan.

845. Montrer que les génératrices rectilignes et les hélices généralisées et elles seules sont les géodésiques d'une surface cylindrique.

846. Montrer que les méridiennes d'une surface de révolution sont des géodésiques.

847. Montrer qu'un parallèle d'une surface de révolution est une géodésique si et seulement si la tangente à une méridienne est parallèle à l'axe de rotation.

848. Trouver les géodésiques de la sphère.

849. Montrer qu'une géodésique est une ligne asymptotique si et seulement si c'est une droite.

850. Montrer qu'une géodésique est une ligne de courbure si et seulement si elle est plane.

851. Montrer que l'enveloppe des plans rectifiants d'une ligne géodésique sur une surface développable n'est autre que cette surface.

852. Montrer que le vecteur de Darboux en un point M d'une géodésique d'une surface développable est orienté suivant la génératrice en M.

853. Montrer que sur la surface enveloppant les plans rectifiants d'une ligne gauche, cette ligne est une géodésique.

854. Montrer que la courbure géodésique d'une ligne d'une surface peut être calculée par la formule

$$k_g = \boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}$$

où $\boldsymbol{m}$ est le vecteur unitaire de la normale à la surface.

855. Montrer que la courbure géodésique d'une ligne en un point M est égale à la courbure de la projection de cette ligne sur le plan tangent à la surface en M.

856-858. Trouver la courbure géodésique:

(856) D'un cercle de rayon r situé sur une sphère de rayon R.

(857) Des hélices $u = \text{const}$ de l'hélicoïde normal $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

(858) Des lignes $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$ de la surface $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = f(v)$.

859. Montrer que la courbure géodésique en tout point M d'une ligne asymptotique est égale à la courbure en M.

860. Montrer que la torsion géodésique d'une ligne sur une surface peut être calculée avec la formule

$$\varkappa_g = \dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m},$$

où $\boldsymbol{m}$ est le vecteur unitaire de la normale à la surface.

861. Montrer que pour qu'une ligne d'une surface soit une ligne de courbure, il est nécessaire et suffisant qu'en chacun de ses points la torsion géodésique soit nulle.

862. Montrer que la torsion géodésique en tout point d'une ligne asymptotique est égale à la torsion de cette ligne.

863-864. Trouver les géodésiques de:

(863) L'hélicoïde normal.

(864) La pseudo-sphère.

865. Montrer que les géodésiques de la surface de Liouville sont définies par les équations

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)+a}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)-a}} + b,$$

où a et b sont des constantes arbitraires.

866. Montrer que le long de toute géodésique d'une surface de révolution on a la relation

$$\rho \cos \mu = c,$$

où ρ est la distance d'un point de la géodésique à l'axe de rotation, μ l'angle de la géodésique et d'un parallèle, c une constante caractérisant la géodésique donnée (*théorème de Clairaut*).

La réciproque est-elle vraie, i.e. si cette relation a lieu le long d'une ligne d'une surface de révolution, en résulte-t-il que cette ligne est une géodésique?

867-869. Appliquer le théorème de Clairaut à l'étude des géodésiques des surfaces suivantes:

(867) L'ellipsoïde de révolution.

(868) L'hyperboloïde de révolution à une nappe.

(869) Le tore.

870. Montrer que si en un point M_0 d'une surface on trace les géodésiques dans toutes les directions et qu'à partir de M_0 on porte sur elles des arcs de longueur égale, alors les extrémités de ces arcs forment une trajectoire orthogonale aux géodésiques.

§ 18. Méthode du repère mobile en théorie des surfaces

On appelle *forme différentielle linéaire* (ou 1-*forme*) sur une surface S une application ω qui à tout point $M \in S$ associe une forme linéaire ω_M sur l'espace vectoriel T_MS ; la 1-forme ω associe à tout champ de vecteurs ξ sur la surface une fonction $\omega(\xi)$ sur la surface définie par la formule

$$\omega(\xi)(M) = \omega_M(\xi_M).$$

On dit que la 1-forme ω est *lisse* si la fonction $\omega(\xi)$ est lisse pour tout champ de vecteurs lisse ξ.

On appelle 2-*forme* sur une surface S une application Ω qui à tout point $M \in S$ associe une 2-forme Ω_M sur l'espace vectoriel T_MS ; la 2-forme Ω associe à tout couple ξ, η de champs de vecteurs sur la surface la fonction $\Omega(\xi, \eta)$ sur la surface définie par

$$\Omega(\xi, \eta)(M) = \Omega_M(\xi_M, \eta_M).$$

On dit qu'une 2-forme est lisse si la fonction $\Omega(\xi, \eta)$ est lisse pour tous champs de vecteurs lisses ξ et η. Dans la suite, on n'envisagera que des 1-formes et des 2-formes lisses.

On appelle *produit extérieur* des 1-formes ω et θ sur une surface S la 2-forme $\omega \wedge \theta$ définie par la formule $(\omega \wedge \theta)_M = \omega_M \wedge \theta_M$, où le produit extérieur $\omega_M \wedge \theta_M$ est considéré sur l'espace vectoriel T_MS. Soient $(U, \boldsymbol{r})$ une représentation paramétrique d'une surface S en coordonnées curvilignes (u, v) et $W = \boldsymbol{r}(U)$. Les différentielles du et dv des coordonnées curvilignes peuvent être traitées comme des 1-formes sur W d'après la règle

$$du_M(\boldsymbol{h}) = h_1, \quad dv_M(\boldsymbol{h}) = h_2,$$

où $\boldsymbol{h}$ est un vecteur tangent à S en M, (h_1, h_2) ses coordonnées dans la base mobile $(\partial_u \boldsymbol{r}, \partial_v \boldsymbol{r})$. Toute 1-forme ω sur W se représente de

façon unique sous la forme

$$\omega = a_1\, du + a_2\, dv,$$

où $a_1 = \omega(\partial_u r)$, $a_2 = \omega(\partial_v r)$ sont des fonctions différentiables sur W. La différentielle df de la fonction f définie sur W est une 1-forme sur W. Cette fonction peut être traitée comme une fonction sur U d'après la règle

$$f(u, v) = f(r(u, v)).$$

La différentielle df s'écrit dans ce cas

$$df = \partial_u f\, du + \partial_v f\, dv.$$

On appelle *différentielle extérieure* d'une 1-forme ω définie sur W la 2-forme $d\omega$ définie par la formule

$$d\omega = da_1 \wedge du + da_2 \wedge dv = (\partial_u a_2 - \partial_v a_1)\, du \wedge dv.$$

On appelle *repère mobile* sur une surface orientée $W = r(U)$ une application qui associe à tout point M de W le repère $(M, e_1(M), e_2(M), e_3(M))$, où les vecteurs $e_1(M)$, $e_2(M)$ appartiennent à $T_M W$, et $(e_1(M), e_2(M), e_3(M))$ est une base orthonormale de $\mathfrak{R}^3$ compatible avec l'orientation de W. Les quantités M, e_1, e_2, e_3 peuvent être traitées comme des fonctions vectorielles sur W à valeurs dans $\mathfrak{R}^3$ d'après la règle : à un point N de W la fonction vectorielle M associe son rayon vecteur, et la fonction vectorielle e_j, le vecteur $e_j(N)$ $(j = 1, 2, 3)$. Les fonctions vectorielles M et e_3 sont lisses ; on admettra que e_1 et e_2 sont aussi lisses. Ecrivons les différentielles de ces fonctions vectorielles sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
dM_N(h) &= \omega_N^1(h)\, e_1(N) + \omega_N^2(h)\, e_2(N) + \omega_N^3(h)\, e_3(N),\\
de_{1N}(h) &= \omega_{1N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{1N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{1N}^3(h)\, e_3(N),\\
de_{2N}(h) &= \omega_{2N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{2N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{2N}^3(h)\, e_3(N),\\
de_{3N}(h) &= \omega_{3N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{3N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{3N}^3(h)\, e_3(N),
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où $h \in T_N W$. Alors ω^i, ω_i^j $(i, j = 1, 2, 3)$ sont des 1-formes sur la surface W. Les équations (1) se mettent sous la forme

$$dM = \sum_{i=1}^{3} \omega^i e_i, \qquad de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j. \quad (2)$$

Les équations (2) s'appellent *équations du mouvement* du repère mobile. Un repère mobile (M, e_1, e_2, e_3) s'appelle *repère de Cartan* de la surface W si en tout point $N \in W$ les vecteurs $e_1(N)$ et $e_2(N)$ ont des directions principales.

Soient ξ un champ de vecteurs lisse sur une surface W et

$$\xi_N = a_1(N)\, e_1(N) + a_2(N)\, e_2(N);$$

alors a_1 et a_2 sont des fonctions lisses sur W. Le champ de vecteurs ξ peut aussi être traité comme un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et mis sous la forme

$$\xi_N = \xi_1(N)\,i_1 + \xi_2(N)\,i_2 + \xi_3(N)\,i_3,$$

où (i_1, i_2, i_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Considérons une courbe régulière lisse $\gamma(t)$ sur W et désignons par $\xi(t)$ le vecteur $\xi_{\gamma(t)}$. On a alors

$$\xi(t) = \xi_1(t)\,i_1 + \xi_2(t)\,i_2 + \xi_3(t)\,i_3,$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des fonctions lisses. Le vecteur

$$\xi'(t) = \sum_{j=1}^{3} \xi'_j(t)\,i_j$$

s'appelle *dérivée du champ de vecteurs* ξ *le long de la courbe* γ.

Soient h un vecteur tangent à W en M, $\gamma(t)$ une courbe régulière de W passant par M pour $t = t_0$ et telle que $\gamma'(t_0) = h$. On appelle *dérivée covariante du champ de vecteurs* ξ *dans la direction du vecteur* h la projection orthogonale sur le plan tangent à W en M du vecteur $\xi'(t_0)$, dérivée du champ de vecteurs ξ le long de la courbe γ. La dérivée covariante du champ de vecteurs ξ dans la direction de h est notée $D_h\xi$ et est un vecteur tangent à W en M. Si $\xi = a_1e_1 + a_2e_2$, on a alors la formule

$$D_h\xi = da_1(h)\,e_1 + da_2(h)\,e_2 - a_2\omega_1^2(h)\,e_1 + a_1\omega_1^2(h)\,e_2.$$

On dit qu'un champ de vecteurs ξ est *parallèle le long d'une courbe* γ si pour tous les t

$$D_{\gamma(t)}\xi = 0,$$

c'est-à-dire que la dérivée covariante du champ ξ dans la direction de tout vecteur tangent à la courbe γ est nulle.

871. Montrer que si le repère mobile est orthonormal, alors la matrice (ω_i^j) est antisymétrique.

872. Montrer que la forme ω^3 est nulle dans les formules (1) et (2), car les vecteurs e_1 et e_2 du repère mobile forment une base dans le plan tangent à la surface.

873. Soit $\gamma(t)$ une ligne de courbure sur une surface W. Montrer que si le vecteur e_1 du repère mobile est tangent à une ligne γ, alors $\omega^2_{3\gamma(t)}(e_1) = 0$, et de façon analogue que si e_2 est tangent à γ, alors $\omega^1_{3\gamma(t)}(e_2) = 0$.

874. Montrer qu'en tous les points d'une surface on a les relations

$$\omega^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2).$$

875. Montrer que si en chaque point d'une surface W les vecteurs $e_1 \uparrow\uparrow \partial_u r$, $e_2 \uparrow\uparrow \partial_v r$, alors $\omega^1 = \sqrt{E}\,du$, $\omega^2 = \sqrt{G}\,dv$, où E et G sont les coefficients de la première forme quadratique de la surface W.

876. Supposons que les lignes de coordonnées de la représentation paramétrique $(U, \boldsymbol{r})$ de la surface W sont des lignes de courbure et que $\boldsymbol{e}_1 \uparrow\uparrow \partial_u \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{e}_2 \uparrow\uparrow \partial_v \boldsymbol{r}$. Montrer que les 1-formes ω^i, ω_i^j sont définies par

$$\left.\begin{aligned} &\omega^1 = \sqrt{E}\, du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\, dv, \\ &\omega_1^2 = -\omega_2^1 = q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv, \\ &\omega_1^3 = -\omega_3^1 = p_1 \sqrt{E}\, du, \\ &\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p_2 \sqrt{G}\, dv. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

877. On dit qu'un système d'équations différentielles de la forme

$$\partial_u b_i = \sum_{j=1}^{n} f_i^j b_j, \quad \partial_v b_i = \sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est *complètement intégrable* si

$$\partial_v \Big(\sum_{j=1}^{n} f_i^j b_j \Big) = \partial_u \Big(\sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j \Big).$$

Ce système admet une solution unique vérifiant les conditions initiales

$$b_i (u_0, v_0) = b_i^0.$$

Si ω^i et ω_i^j sont de la forme (3), alors les équations du mouvement du repère mobile sont équivalentes au système d'équations

$$\left.\begin{aligned} &\partial_u M = \sqrt{E}\, \boldsymbol{e}_1, && \partial_v M = \sqrt{G}\, \boldsymbol{e}_2, \\ &\partial_u \boldsymbol{e}_1 = q_1 \sqrt{E}\, \boldsymbol{e}_2 + p_1 \sqrt{E} \boldsymbol{e}_3, && \partial_v \boldsymbol{e}_1 = q_2 \sqrt{G}\, \boldsymbol{e}_2, \\ &\partial_u \boldsymbol{e}_2 = -q_1 \sqrt{E}\, \boldsymbol{e}_1, && \partial_v \boldsymbol{e}_2 = -q_2 \sqrt{G}\, \boldsymbol{e}_1 + p_2 \sqrt{G}\, \boldsymbol{e}_3, \\ &\partial_u \boldsymbol{e}_3 = -p_1 \sqrt{E}\, \boldsymbol{e}_1, && \partial_v \boldsymbol{e}_3 = -p_2 \sqrt{G}\, \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Montrer que les conditions d'intégrabilité complète du système (4) sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\partial_v \sqrt{E} + q_1 \sqrt{EG} = 0, \quad \partial_u \sqrt{G} = q_2 \sqrt{EG}, \\ &\partial_v (q_1 \sqrt{E}) - \partial_u (q_2 \sqrt{G}) = p_1 p_2 \sqrt{EG}, \\ &\partial_v (p_1 \sqrt{E}) + p_2 q_1 \sqrt{EG} = 0, \quad \partial_u (p_2 \sqrt{G}) = p_1 p_2 \sqrt{EG}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Quelle est la signification géométrique des conditions initiales?

878. Montrer que si les 1-formes ω^i et ω_i^j vérifient les conditions (3), alors les conditions d'intégrabilité complète (5) sont équivalentes aux conditions

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2,$$
$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3.$$

879. Montrer que si les 1-formes ω^i et ω_i^j vérifient les conditions (3), alors la première forme quadratique de la surface est de la forme

$$ds^2 = dM^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

880. Montrer que si les 1-formes ω^i et ω_i^j vérifient les conditions (3), la deuxième forme quadratique est définie par

$$\varphi_2 = -dM \cdot de_3 = p_1 E\,du^2 + p_2 G\,dv^2.$$

881. Montrer que dans les équations (3) p_1 et p_2 sont les courbures principales de la surface.

882. Montrer que la surface réglée engendrée par les tangentes aux lignes de courbure u aux points d'une ligne de courbure v est une surface développable et que son arête de rebroussement est tangente à l'axe Me_1 aux points de rayon vecteur $M - \frac{1}{q_2} e_1$. De façon analogue, montrer que la surface engendrée par les tangentes aux lignes v aux points d'une ligne u est une surface développable et que son arête de rebroussement touche l'axe Me_2 au point de rayon vecteur $M + \frac{1}{q_1} e_2$.

883. Prouver la formule d'Euler

$$k_n = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi.$$

884. Montrer qu'on peut mettre l'équation de l'indicatrice de Dupin sous la forme $p_1 x^2 + p_2 y^2 = \pm 1$.

885. Montrer que la courbure totale d'une surface dépend seulement des coefficients de la première forme quadratique et peut être exprimée au moyen de la formule

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \partial_v \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \partial_v \sqrt{E} \right) - \partial_u \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \partial_u \sqrt{G} \right) \right\}.$$

886. Montrer que le carré de la torsion d'une ligne asymptotique d'une surface est en tout point égal à la courbure totale de la surface en ce point, prise avec le signe contraire (*théorème de Beltrami-Enneper*).

887. Montrer que la courbure géodésique des lignes de courbure en un point M s'exprime par les formules

$$k_g\,|_{dv=0} = q_1, \quad k_g\,|_{du=0} = -q_2.$$

888. Montrer que

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

où K est la courbure totale de la surface.

889. Montrer que la translation préserve la longueur et les angles des vecteurs d'une surface.

890. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne d'une surface soit une géodésique est que son vecteur unitaire tangent soit translatable le long d'elle.

891. Montrer que si un champ de vecteurs unitaire sur une surface

$$r = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2$$

est translatable le long d'une ligne de la surface, alors

$$-d\varphi = q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv \tag{6}$$

sur cette ligne.

892. Montrer que l'angle de rotation d'un vecteur sur une surface par translation le long de la frontière L d'un domaine connexe D de la surface est égal à la *courbure intégrale* de D, i.e.

$$\Delta\varphi = \iint_D K\, d\sigma.$$

893. Montrer qu'entre la courbure intégrale d'un domaine connexe D d'une surface, limité par un contour lisse L, et la *courbure géodésique intégrale* de ce contour on a la relation

$$\iint_D K\, d\sigma + \oint_L k_g\, ds = 2\pi.$$

894. Soit D un domaine connexe d'une surface, limité par un polygone curviligne L. Montrer que

$$\iint_D K\, d\sigma + \oint_L k_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les angles extérieurs de L (*théorème de Gauss-Bonnet*).

895. Montrer que si un domaine D d'une surface est limité par un triangle géodésique ABC (c'est-à-dire que les côtés de ce triangle sont des géodésiques) dont les angles intérieurs sont respectivement α, β et γ, alors

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_D K\, d\sigma.$$

896. Montrer que sur les surfaces connexes il n'existe pas de géodésique fermée aux points où la courbure totale n'est pas positive.

§ 19. Exercices divers

897. Trouver les images des projections orthogonales des points de la surface

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 4x + 18y - 16z = 0$$

sur les plans de coordonnées.

898. Montrer que si une surface W est tangente à un plan le long d'une ligne, alors tout point de cette ligne est un point parabolique pour W.

899. Montrer que si les normales à une surface W le long d'une ligne l sont parallèles, alors tous les points de l sont des points paraboliques pour W.

900. Montrer que si par une application sphérique d'une surface S toute ligne asymptotique d'une famille est envoyée dans un grand cercle, alors S est une surface réglée gauche.

901. Montrer que le plan et la caténoïde sont les seules surfaces de révolution minimales.

902. Montrer que parmi les surfaces réglées l'hélicoïde normal est l'unique surface minimale (distincte du plan).

903. Trouver les surfaces minimales susceptibles d'être définies par une équation de la forme $z = f(y/x)$.

904. Soient $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ l'équation d'une surface S, $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + a\boldsymbol{m}$ l'équation d'une surface S^* parallèle à S. Exprimer les courbures totale et moyenne de la surface S^* en fonction de celles de S.

905. Soit donnée une surface de courbure moyenne constante $H \neq 0$. Sur chacune de ses normales on porte un segment de longueur $1/2H$. Montrer que la courbure totale de la surface parallèle obtenue est constante.

906. Montrer que la courbure moyenne d'une surface S vérifie la relation

$$H = \lim_{a \to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\, d\sigma},$$

où $d\sigma$ et $d\sigma^*$ sont les éléments de surface correspondants des surfaces parallèles S et S^*.

907. Montrer que l'aire de toute portion d'une surface minimale est $\geqslant$ à l'aire de la portion correspondante de surface parallèle.

908. Montrer que la limite du rapport de l'aire de l'image d'un domaine d'une surface S par une application sphérique à l'aire de ce domaine a la même valeur et le même signe que la courbure totale de S.

909. Montrer que si un rayon de courbure principale d'une surface est constant, cette surface est l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon constant dont les centres sont situés sur une certaine ligne.

910. Soit donnée une famille de droites

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3},$$

où t et p sont des paramètres variables. Quelle relation doivent satisfaire p et t pour que ces droites forment une surface développable? Trouver la figure formée par les arêtes de rebroussement de

telles surfaces. Trouver les lignes d'intersection de ces surfaces avec le plan xOy.

911. Un cylindre circulaire est coupé par un plan non parallèle à l'axe. On demande la transformée de cette ligne d'intersection par développement du cylindre sur un plan.

912. On donne une sphère et une droite d. Trouver les trajectoires orthogonales des sections formées sur la sphère par les plans contenant la droite d.

913. Montrer que la trajectoire d'un point matériel en mouvement sur une surface en l'absence de forces extérieures est une géodésique.

914. On appelle *podaire* d'une surface par rapport à un point donné la figure formée des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les plans tangents à la surface. Trouver la podaire de la surface $F(x, y, z) = 0$ par rapport à l'origine des coordonnées.

915-917. Trouver les podaires des surfaces suivantes par rapport à l'origine des coordonnées:

(915) $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \varepsilon, \ \varepsilon' = \pm 1.$

(916) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$

(917) $xy = az.$

918. Montrer que seules les surfaces développables sont applicables sur le plan.

919. Que peut-on dire de la surface dont la première forme quadratique est

$$ds^2 = E(u)\, du^2 + G(v)\, dv^2 ?$$

920. Quelles sont les surfaces dont les coefficients de la première forme quadratique peuvent être réduits à des constantes?

921. Montrer que lorsqu'on applique une surface sur l'autre, les géodésiques de l'une se transforment en celles de l'autre.

922. Montrer que si sur une surface il existe deux familles de géodésiques se coupant sous un angle constant, alors cette surface est une développable. Inversement montrer que sur toute surface développable il existe des familles de géodésiques jouissant de la propriété indiquée.

923. Montrer que les plans osculateurs à une ligne géodésique d'un cône sont équidistants du sommet. Inversement, montrer que les lignes du cône jouissant de la propriété indiquée sont les géodésiques.

924. Montrer que deux surfaces de même courbure totale constante sont applicables l'une sur l'autre.

925. Montrer que toute surface de courbure totale positive constante est applicable sur une sphère.

926. Montrer que toute surface de courbure totale négative constante est applicable sur une pseudo-sphère.

927. Montrer que lorsqu'on développe un hélicoïde sur une caténoïde, les lignes de courbure d'une surface se transforment en les lignes asymptotiques de l'autre et inversement.

CHAPITRE 5

PROPRIÉTÉS AFFINES DES LIGNES ET DES SURFACES

Nous étudions des lignes et des surfaces dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui diffère d'un espace affine par l'existence d'une métrique. Toutes les propriétés des lignes et des surfaces vues précédemment sont invariantes par les mouvements de $\mathbb{R}^3$ et s'appellent *propriétés métriques*. Mais beaucoup de ces propriétés sont invariantes par des transformations plus générales de $\mathbb{R}^3$, plus exactement par des transformations affines, et sont dites *propriétés affines*. Toute *application affine* qui associe à un point M (x, y, z) le point M' (x', y', z') est définie par

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3,$$

où la matrice (a_{ij}) n'est pas dégénérée. Si la matrice (a_{ij}) est orthogonale, l'application s'appelle mouvement.

928. Soient $\mathcal{A}$ une application affine de l'espace $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ une courbe de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la composition $\mathcal{A} \circ \boldsymbol{r}(t)$ est une courbe de $\mathbb{R}^3$.

929. Montrer qu'une application affine envoie une courbe dans une courbe, autrement dit que la notion de ligne est affine.

930. Montrer qu'une application affine envoie une surface dans une surface, autrement dit que la notion de surface est affine.

931. Montrer que si $(U, \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique d'une surface S et $\mathcal{A}$ une application affine, alors $(U, \mathcal{A} \circ \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de la surface $\mathcal{A}(S)$.

932. Montrer que la notion de tangente à une ligne est une notion affine.

933. Montrer que la notion de plan tangent à une surface est une notion affine, c'est-à-dire que l'image d'un plan tangent à une surface par une application affine est un plan tangent à l'image de la surface.

934. Montrer que si une famille à un paramètre de lignes planes ou de surfaces possède une enveloppe, alors la transformée affine de cette famille possède une enveloppe qui est la transformée affine de l'enveloppe de la première famille.

935. Montrer que la notion de surface réglée est affine.

936. Montrer que la transformée affine d'une surface développable S est une surface développable dont l'arête de rebroussement est la transformée affine de l'arête de rebroussement de S.

937. Montrer que la transformée affine d'une surface réglée gauche est une surface réglée gauche.

938. Montrer que la notion de plan osculateur à une ligne est une notion affine.

939-957. Indiquer les notions affines et les notions métriques:

(939) Une ligne plane.

(940) La courbure d'une ligne.

(941) La développée d'une ligne plane.

(942) La torsion d'une ligne.

(943) La normale à une ligne.

(944) La binormale à une ligne.

(945) Le plan normal à une ligne.

(946) Le plan rectifiant à une ligne.

(947) Les directions conjuguées et asymptotiques en un point donné d'une surface.

(948) Les lignes asymptotiques d'une surface.

(949) Les lignes de courbure d'une surface.

(950) Les géodésiques d'une surface.

(951) La courbure totale d'une surface.

(952) La courbure moyenne d'une surface.

(953) Une surface de courbure totale nulle.

(954) Une surface de courbure moyenne nulle (une surface minimale).

(955) Les points elliptiques, hyperboliques et paraboliques d'une surface.

(956) Les points ombilicaux d'une surface.

(957) Les points méplats d'une surface.

958. Trouver l'enveloppe de la famille de droites reliant les extrémités des couples de diamètres conjugués de l'ellipse.

959. Trouver l'équation de l'enveloppe de la famille de droites passant par les couples de points de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

qui forment avec le centre des secteurs elliptiques d'aire constante S.

960. Trouver l'équation de l'enveloppe d'une famille de droites qui forment avec deux droites se coupant sous un angle de 2α des triangles d'aire constante S.

961. Trouver l'enveloppe d'une famille de droites découpant sur une parabole donnée $y = ax^2$ des segments d'aire constante S.

962. Montrer que la figure, formée par les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface réglée gauche le long d'une génératrice, est un hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique.

CHAPITRE 6

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU CHAMP

§ 20. Champ scalaire

Un *champ scalaire* est défini par une fonction scalaire

$$u = u(P) = u(x, y, z) = u(\mathbf{r}),$$

où $P(x, y, z)$ est un point de l'espace et

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

son rayon vecteur.

Un champ $u = u(P)$ est *plan* s'il existe un système de coordonnées tel que la fonction u ne dépende pas de z, c'est-à-dire

$$u = u(x, y).$$

Ce champ n'est généralement considéré que sur le plan xOy, car il prend les mêmes valeurs sur toute droite parallèle à Oz.

Les surfaces

$$u(x, y, z) = C,$$

où $C = \text{const}$, s'appellent *surfaces de niveau du champ scalaire*.

Dans le cas d'un champ plan les surfaces de niveau

$$u(x, y) = C \tag{1}$$

sont des surfaces cylindriques, de génératrices parallèles à Oz.

Si un champ plan n'est considéré que sur le plan xOy, alors l'équation (1) en définit toutes les *lignes de niveau*. Si la fonction

$$u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$$

qui définit le champ scalaire est continûment différentiable, alors on appelle *gradient* de ce champ le champ de vecteurs

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Le gradient d'un champ u en un point $P(x, y, z)$ est dirigé suivant la normale à la surface de niveau

$$u(x, y, z) = C,$$

passant par le point P. Ce vecteur dont le module en tout point du champ est

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

donne la plus grande vitesse de variation de la fonction u. Le gradient est désigné par le symbole ∇ qui se lit « nabla ». Donc,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

∇ peut être traité comme un opérateur différentiel (l'*opérateur de Hamilton*):

$$\nabla = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

qui, appliqué au scalaire u, donne grad u. Il est commode de considérer cet opérateur comme un vecteur symbolique et lui appliquer les opérations ordinaires d'algèbre linéaire. Par exemple

$$\boldsymbol{r} \cdot \nabla = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

La *dérivée d'un champ scalaire u (P) suivant une direction l* définie par le vecteur

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

s'exprime par

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

où

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Entre la dérivée suivant une direction et le gradient d'un champ scalaire on a la formule

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \boldsymbol{a}_0 \cdot \operatorname{grad} u,$$

où $\boldsymbol{a}_0$ est le vecteur unitaire de la direction considérée.

On appelle *point stationnaire* d'un champ scalaire tout point en lequel la dérivée de ce champ suivant une direction quelconque est nulle.

963-967. Trouver les lignes de niveau des champs plans (considérés uniquement sur le plan xOy):

(963) $u = x^2 + y^2$. (964) $u = x^2 - y^2$.

(965) $u = y/x^2$. (966) $u = 2x/(x^2 + y^2)$.

(967) $u = (2x - y + 1)/x^2$.

968-971. Trouver les surfaces de niveau des champs scalaires suivants:

(968) $u=x+y+z$.

(969) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(970) $u=x^2+y^2-z^2$.

(971) $u=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$.

972. Trouver la dérivée du champ scalaire

$$u = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$$

au point M (1, 2) dans la direction du vecteur reliant ce point au point N (4, 6).

973. Trouver la dérivée du champ scalaire

$$u = xy^2 + z^3 - xyz$$

au point M (1, 1, 2) dans la direction qui fait avec les axes de coordonnées les angles $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

974-975. Trouver les points stationnaires des champs scalaires suivants:

(974) $u = x^3 + y^3 - 3xy$.

(975) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

976-979. Trouver les gradients des champs scalaires suivants:

(976) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$.

(977) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz$.

(978) $u = xyze^{x+y+z}$.

(979) $u=\operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$.

980. Trouver le gradient du champ scalaire $u = x^3 + y^3 - 3xy$ au point M (2, 1).

981. Trouver la valeur et la direction du gradient du champ scalaire $u = x^2 + y^2 + z^2$ au point M (2, —2, 1).

982. Trouver la valeur et la direction du gradient du champ scalaire $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ aux points O (0, 0, 0), A (2, 0, 1). En quel point le gradient est-il nul?

983-984. Trouver l'angle des gradients des champs scalaires suivants aux points donnés:

(983) $u = \ln (y/x)$, A (1/2, 1/4), B (1, 1).

(984) $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $A(1, 2, 2)$, $B(-3, 1, 0)$.

985. Trouver l'angle des gradients des champs $u=x^2+y^2-z^2$, $v=\arcsin\frac{x}{x+y}$ au point $M\left(1, 1, \sqrt{7}\right)$.

986. Etudier le caractère de croissance du champ scalaire $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ dans la direction du vecteur $\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ au point M (1, 1, 1); trouver la valeur de la vitesse de variation de ce champ.

987. Trouver les points en lesquels le gradient de la fonction $u = \ln\left(y + \frac{1}{x}\right)$ est égal à $-\frac{25}{16}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

988. Trouver la dérivée du champ $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ au point $M(x, y, z)$ dans la direction de son rayon vecteur $\boldsymbol{r}$. Dans quel cas cette dérivée est-elle égale au gradient?

989. Trouver la dérivée du champ scalaire $u = u(x, y, z)$ dans la direction du gradient du champ $v = v(x, y, z)$. Dans quel cas cette dérivée est-elle nulle?

990-996. Démontrer les formules suivantes:

(990) grad $c = 0$, c — const.

(991) grad $(u + v) =$ grad $u +$ grad v.

(992) grad $(uv) = v$ grad $u + u$ grad v.

(993) grad $(cu) = c$ grad u, c — const.

(994) $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\text{grad}\,u - u\,\text{grad}\,v}{v^2}$.

(995) grad $f(u) = f'(u)$ grad u.

(996) grad $u^n = nu^{n-1}$ grad u.

997-1004. Trouver le gradient du champ scalaire dépendant de $r = |\boldsymbol{r}|$ dans chacun des cas suivants:

(997) grad r.

(998) grad $f(r)$.

(999) grad r^n, n est un entier naturel.

(1000) grad $(1/r)$.

(1001) grad $\ln r$.

(1002) grad $(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{c}$ — const.

(1003) grad $((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})/(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}))$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — const.

(1004) grad $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r})^2$, $\boldsymbol{c}$ — const.

1005-1007. Démontrer les relations suivantes:

(1005) $\text{grad}\,f(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial u}\,\text{grad}\,u + \frac{\partial f}{\partial v}\,\text{grad}\,v + \frac{\partial f}{\partial w}\,\text{grad}\,w$.

(1006) $(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\,r^n = nr^n$. (1007) $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}$.

1008. Etablir une formule de calcul du gradient d'un champ scalaire $f(u, v, w)$ d'une fonction donnée de trois coordonnées orthogonales curvilignes.

1009. Etablir une formule de calcul du gradient d'un champ scalaire en coordonnées cylindriques.

1010-1014. Trouver les gradients des champs scalaires suivants en coordonnées cylindriques:

(1010) $u = z + r\varphi$. (1011) $u = zr\varphi$.

(1012) $u = z \sin \varphi + r$. (1013) $u = z \cos \varphi + r^2$.

(1014) $u = z \sin^2 \varphi + r^3$.

1015. Etablir une formule de calcul du gradient d'un champ scalaire en coordonnées sphériques.

1016-1020. Trouver les gradients des champs scalaires suivants en coordonnées sphériques:

(1016) $u = \rho\varphi$. (1017) $u = \rho\theta$.

(1018) $u = \rho\theta\varphi$. (1019) $u = \varphi \sin \theta + \rho$.

(1020) $u = \theta \cos \varphi + \rho$.

§ 21. Champ de vecteurs

Un *champ de vecteurs* est défini par une fonction vectorielle de point

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

où $P(x, y, z)$ est un point de l'espace de rayon vecteur

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

On appelle *ligne vectorielle* d'un champ une ligne dont toute tangente possède la direction du vecteur $\boldsymbol{a}(P)$.

Les lignes vectorielles (*lignes de force, lignes de courant*) d'un champ de vecteurs se déduisent à partir du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

On appelle *divergence* du champ de vecteurs

$$\boldsymbol{a}(P) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

la fonction vectorielle

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \boldsymbol{a}.$$

On appelle *rotationnel* du champ de vecteurs $\boldsymbol{a}(P)$ le champ de vecteurs

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

ou sous la forme symbolique

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

On appelle *flux d'un champ de vecteurs* $\boldsymbol{a}$ (P) à travers une surface S dans le sens du vecteur unitaire de la normale

$$\boldsymbol{n}\ (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

à S l'intégrale

$$\Pi = \iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_S a_n\, d\sigma = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, d\sigma,$$

où a_n est la projection du vecteur $\boldsymbol{a}$ sur la direction du vecteur $\boldsymbol{n}$.

Si S est une surface fermée limitant un domaine V, et $\boldsymbol{n}$, le vecteur unitaire de la normale extérieure à S, alors on a la *formule d'Ostrogradski*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dw =$$

$$= \iint_S (a_x \cos\alpha + \alpha_y \cos\beta + \alpha_z \cos\gamma)\, d\sigma,$$

ou sous la forme vectorielle

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dw = \iint_S a_n\, d\sigma.$$

L'*intégrale linéaire d'un vecteur* $\boldsymbol{a}$ *le long d'une ligne* L est définie par :

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_L a_s\, ds = \int_L a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz,$$

où a_s est la projection du vecteur $\boldsymbol{a}$ sur une tangente à L. L'intégrale linéaire exprime le *travail du champ de vecteurs* $\boldsymbol{a}$ le long de la ligne L. Si la ligne L est fermée, l'intégrale linéaire s'appelle *circulation du champ de vecteurs* $\boldsymbol{a}$ le long du contour L.

Si la ligne fermée L limite une surface orientée S, on a alors la *formule de Stokes*

$$\oint_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \boldsymbol{n}\cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\sigma,$$

où $\boldsymbol{n}$ est le champ de vecteurs unitaire des normales à S définissant l'orientation de S, l'orientation de L étant compatible avec celle de S.

On dit qu'un champ de vecteurs $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ est *potentiel* si

$$\boldsymbol{a} = \text{grad}\, u,$$

où $u = u(\boldsymbol{r})$ est une fonction scalaire (le *potentiel du champ de vecteurs* $\boldsymbol{a}$).

Pour qu'un champ de vecteurs $\boldsymbol{a}$ défini sur un domaine connexe soit potentiel, il est nécessaire et suffisant que

$$\text{rot}\, \boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Dans ce cas le potentiel u se détermine à partir de l'équation

$$du = a_x\, dx + a_y\, dy + a_z dz.$$

Si le potentiel u est défini de façon unique, alors

$$\int\limits_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A);$$

en particulier, la circulation du champ de vecteurs $\boldsymbol{a}$ le long de tout contour fermé est nulle.

On dit qu'un champ de vecteurs $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ est *solénoïdal* si en chacun de ses points

$$\text{div}\, \boldsymbol{a} = 0;$$

dans ce cas le flux du champ de vecteurs à travers toute surface fermée est nul.

Si un champ de vecteurs est à la fois potentiel et solénoïdal, alors

$$\text{div}\,(\text{grad}\, u) = 0$$

et la fonction potentielle u est *harmonique*, c'est-à-dire qu'elle est solution de l'*équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

ou

$$\Delta u = 0,$$

où

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est l'*opérateur de Laplace*.

1021-1025. Trouver les lignes vectorielles des champs de vecteurs suivants:

(1021) $\boldsymbol{a} = -cy\boldsymbol{i} + cx\boldsymbol{j}$, c — const.

(1022) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$.

(1023) $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$.

(1024) $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$.

(1025) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

1026-1027. Trouver la divergence des champs de vecteurs suivants:

(1026) $\boldsymbol{r} = xyz\boldsymbol{i} + (2x + 3y + z)\boldsymbol{j} + (x^2 + z^2)\boldsymbol{k}$.

(1027) $\boldsymbol{r} = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\boldsymbol{i} + (4x^3y + xz + 2)\boldsymbol{j} + (xy - 3xz^2 - 3)\boldsymbol{k}$.

1028-1032. Démontrer les formules suivantes:

(1028) $\operatorname{div} \boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{c}$ — const.

(1029) $\operatorname{div} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$.

(1030) $\operatorname{div} (c\boldsymbol{a}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{a}$, c — const.

(1031) $\operatorname{div} (u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} u$.

(1032) $\operatorname{div} (u\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot \operatorname{grad} u$, $\boldsymbol{c}$ — const.

1033-1040. Trouver la divergence du champ de vecteurs dans les cas suivants:

(1033) $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$. (1034) $\operatorname{div} (f(r)\, \boldsymbol{r})$.

(1035) $\operatorname{div} (\boldsymbol{r}/r)$. (1036) $\operatorname{div} (r^n \boldsymbol{r})$.

(1037) $\operatorname{div} (\operatorname{grad} f(r))$. (1038) $\operatorname{div} (\operatorname{grad} u)$.

(1039) $\operatorname{div} (u \operatorname{grad} u)$. (1040) $\operatorname{div} (u \operatorname{grad} v)$.

1041-1046. En admettant que $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{c}_1$ sont des vecteurs constants, trouver la divergence du champ de vecteurs dans les cas suivants:

(1041) $\operatorname{div} (r\boldsymbol{c})$. (1042) $\operatorname{div} (r^2\boldsymbol{c})$.

(1043) $\operatorname{div} (f(r)\, \boldsymbol{c})$. (1044) $\operatorname{div} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c})$.

(1045) $\operatorname{div} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c}_1)\, \boldsymbol{c}$. (1046) $\operatorname{div} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{r}$.

1047-1048. Sachant que $\boldsymbol{e}$ est un vecteur unitaire constant, calculer:

(1047) $\operatorname{div} (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{e}$. (1048) $\operatorname{div} (\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}))$.

(1049) Calculer

$$\operatorname{div} \frac{x+y+z}{xyz} \boldsymbol{r}.$$

1050-1051. Trouver les fonctions $f(r)$ vérifiant les équations suivantes:

(1050) $\operatorname{div} (\operatorname{grad} f(r)) = 0$.

(1051) $2r \operatorname{div} (\operatorname{grad} f(r)) = \operatorname{div} (\boldsymbol{r}/r)$.

1052. Etablir la formule de la divergence d'un vecteur $\boldsymbol{a}$ en coordonnées curvilignes orthogonales u, v, w, sachant que ses coordonnées cartésiennes orthogonales sont définies par:

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

1053. Exprimer $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ en coordonnées cylindriques.

1054. Exprimer $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ en coordonnées sphériques.

1055-1056. Trouver le rotationnel des champs de vecteurs suivants:

(1055) $\boldsymbol{a} = y^2z\boldsymbol{i} + z^2x\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$.

(1056) $\boldsymbol{a} = xyz\boldsymbol{i} + (2x + 3y - z)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + z^2)\,\boldsymbol{k}$.

1057-1059. Etablir les formules suivantes:

(1057) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

(1058) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{a}$.

(1059) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

1060-1067. Sachant que $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{c}_1$ sont des vecteurs constants, trouver le rotationnel du champ de vecteurs dans les cas suivants:

(1060) $\operatorname{rot}\boldsymbol{c}$. (1061) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$.

(1062) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c})$. (1063) $\operatorname{rot}((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{r})$.

(1064) $\operatorname{rot}((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}_1)\,\boldsymbol{c})$. (1065) $\operatorname{rot}((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{c}_1)$.

(1066) $\operatorname{rot}(f(r)\,\boldsymbol{r})$. (1067) $\operatorname{rot}(f(r)\,\boldsymbol{c})$.

1068-1071. Etablir les formules suivantes:

(1068) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \boldsymbol{o}$.

(1069) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) = 0$.

(1070) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$.

(1071) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$,

où

$$\Delta\boldsymbol{a} = \Delta a_x\boldsymbol{i} + \Delta a_y\boldsymbol{j} + \Delta a_z\boldsymbol{k}.$$

1072. Montrer à l'aide de la formule d'Ostrogradski que le flux du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ à travers une surface fermée limitant un volume arbitraire V est égal à $3V$.

1073. Calculer le flux du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ à travers la surface fermée engendrée par les plans de coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et la portion de paraboloïde $4 - z = x^2 + y^2$ située dans le premier octant.

1074. Calculer le flux du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

1075. Calculer le flux du champ de l'intensité

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$$

de la charge ponctuelle q à travers une surface de rayon a centrée en q.

1076. Calculer le flux du champ de la tension

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$$

de la charge ponctuelle q à travers une surface fermée S ne contenant pas la charge q.

1077. Calculer le flux du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (x + 2z)\boldsymbol{k}$ à travers la portion de plan $2x + y + z = 2$ située dans le premier octant.

1078. Calculer le flux du vecteur $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$:

a) à travers la surface latérale du cône

$$\frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2} \quad (0 \leqslant z \leqslant H);$$

b) à travers la surface totale de ce cône.

1079. Montrer que

$$\iint_S (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\, b_n\, d\sigma = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, V,$$

V étant le volume limité par la surface fermée S, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ des vecteurs constants.

1080. Calculer l'intégrale linéaire du vecteur $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j}$ le long du premier quart de cercle $\boldsymbol{r} = R\cos t\boldsymbol{i} + R\sin t\boldsymbol{j}$.

1081. Calculer l'intégrale linéaire du vecteur $\boldsymbol{r}$ le long d'une spire de l'hélice $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$ entre $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$.

1082. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ le long de la ligne fermée L formée par les axes de coordonnées et le premier quart d'astroïde $\boldsymbol{r} = R\cos^3 t\boldsymbol{i} + R\sin^3 t\boldsymbol{j}$.

1083. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i}$ le long de la ligne fermée formée de la moitié de droite de l'ellipse $\boldsymbol{r} = b\cos t\boldsymbol{i} + c\sin t\boldsymbol{j}$ et de l'axe Oy.

1084. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i}$ le long du cercle $\boldsymbol{r} = b\cos t\boldsymbol{i} + (b + b\sin t)\boldsymbol{j}$.

1085. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, où c est une constante:

a) le long du cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

b) le long du cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

1086. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = x^2y^3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ le long du cercle $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, à l'aide de la formule de Stokes en prenant la demi-sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ pour surface limitée par ce cercle.

1087-1089. Etablir l'existence du potentiel u des champs suivants et calculer u s'il existe:

(1087) $\boldsymbol{a} = (5x^2y - 4xy)\,\boldsymbol{i} + (3x^2 - 2y)\,\boldsymbol{j}$.

(1088) $\boldsymbol{a} = (y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + z)\,\boldsymbol{j} + (x + y)\,\boldsymbol{k}$.

(1089) $\boldsymbol{a} = yz\,(2x + y + z)\,\boldsymbol{i} + xz\,(x + 2y + z)\,\boldsymbol{j} + xy\,(x + y + 2z)\,\boldsymbol{k}$.

1090. Le champ $\boldsymbol{a} = r\,(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r})$, où $\boldsymbol{c}$ est un vecteur constant, sera-t-il un champ de vecteurs solénoïdal?

1091. Montrer que le champ de vecteurs $\boldsymbol{a} = f(r)\,\boldsymbol{r}$ sera un champ solénoïdal seulement si $f(r) = k/r^3$, où k est une constante.

8. Oui. La réciproque est fausse. En effet, la fonction vectorielle définie par

$$r(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{pour } x \geqslant 0, \ y > 0, \\ \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{pour } x < 0, \ y > 0, \end{cases}$$

est discontinue aux points de l'axe Oy bien que $|r(x, y)| = 1$, c'est-à-dire que la fonction $|r(x, y)|$ soit continue.

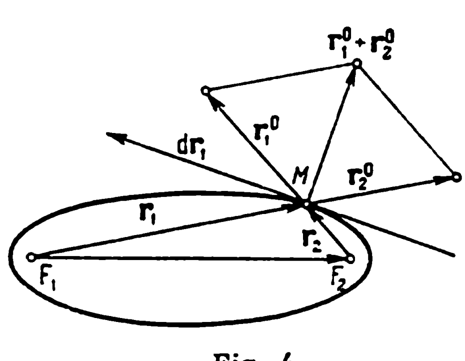


Fig. 4

21. $2r \cdot r'$. 22. $2r' \cdot r''$.

23. $r' \times r'''$.

24. $r'r''r^{(4)}$. 25. $(r' \times r''') \times r''' + (r' \times r'') \times r^{(4)}$.

26. $(r \cdot r') : \sqrt{r^2}$.

27. Soient $r_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $r_2 = \overrightarrow{F_2M}$ (fig. 4). Alors $r_1 = \overrightarrow{F_1F_2} + r_2$. En dérivant, on obtient

$$dr_1 = dr_2. \qquad (*)$$

Par définition de l'ellipse $r_1 + r_2 = 2a$. Dérivons: $dr_1 + dr_2 = 0$. Alors

$$r_1^0 \cdot dr_1 + r_2^0 \cdot dr_2 = 0, \qquad (**)$$

où

$$r_1^0 = \frac{r_1}{r_1}, \quad r_2^0 = \frac{r_2}{r_2}.$$

Les égalités (*) et (**) impliquent

$$(r_1^0 + r_2^0) \cdot dr_1 = 0. \qquad (***)$$

Le vecteur $r_1^0 + r_2^0$ est porté par la bissectrice de l'angle des droites $\overrightarrow{F_1M}$ et $\overrightarrow{F_2M}$. Or d'après (***) le vecteur dr_1 est orthogonal au vec-

teur $r_1^0 + r_2^2$, donc il est porté par la bissectrice extérieure de l'angle indiqué.

28. 1.

29. Non. Si $r(t_0) = o$ pour $t = t_0$, la dérivée $r'(t_0)$ n'existe pas.

30. a) Non, ainsi que le prouve l'exemple de la fonction vectorielle $r(t) = (\cos t, \sin t)$; b) oui.

33. La condition nécessaire est évidente. Montrons la condition suffisante. Soit

$$r'(t) = \varphi(t)\, r(t). \qquad (*)$$

Posons

$$r(t) = \psi(t)\, e(t), \qquad (**)$$

où $|e(t)| = 1$. En dérivant (**) et en se servant de (*), on obtient

$$\psi' e + \psi e' = \varphi\psi e.$$

En multipliant scalairement par e', on trouve que $\psi e'^2 = 0$. Comme $\psi \neq 0$, il vient que $(e')^2 = 0$ et e est une constante.

34. Désignons par a un vecteur unitaire orthogonal aux trois vecteurs coplanaires r', r'', r'''. Alors $a \cdot r' = 0$, $a \cdot r'' = 0$, $a \cdot r''' = 0$, d'où $a' \cdot r' + a \cdot r'' = 0$ ou $a' \cdot r' = 0$ et $a' \cdot r'' + a \cdot r''' = 0$ ou $a' \cdot r'' = 0$; donc $a' \perp r'$ et $a' \perp r''$, c'est-à-dire que $a \parallel a'$ et par suite a est constant. De la relation $a \cdot r' = 0$ il vient que $(a \cdot r)' = 0$, c'est-à-dire que $a \cdot r = \text{const}$; donc la courbe est située dans un plan (perpendiculaire au vecteur a).

R e m a r q u e. La fonction vectorielle a admet une dérivée, car $a = (r' \times r'')/|r' \times r''|$ et par hypothèse la fonction vectorielle r possède des dérivées jusqu'à l'ordre trois inclus.

35. D'après l'exercice 33 on a $r'(t) = \varphi(t)\, a$, a étant un vecteur constant. D'où

$$r(t) = \int \varphi(t)\, dt\, a + b. \qquad (*)$$

Si $t \in [t_1, t_2]$, l'équation (*) définit un segment de droite.

36. Prenons pour origine du système de coordonnées le point de rayon vecteur r_0 et pour vecteurs de base des axes Ox et Oy les vecteurs r_1 et r_2 (le système de coordonnées n'est pas en général rectangulaire). Les équations paramétriques de la courbe s'écrivent alors $x = t$, $y = t^2$. Donc $y = x^2$. Ce qui représente une parabole. Si les vecteurs r_1 et r_2 sont colinéaires, on obtient une demi-droite ou une droite.

37. Un segment de droite.

38. Une demi-droite si $r_1 \neq o$, et une droite si $r_1 = o$.

39. Si un point matériel de masse m décrit une trajectoire $r = r(t)$ sous l'action d'une force centrale F, alors $F = mr'' = ar$,

où $a = a(t)$ est une fonction scalaire. Il reste à montrer que si $\boldsymbol{r}(t)$ d'un point mobile est telle que

$$m\boldsymbol{r}'' = a\boldsymbol{r}, \qquad (*)$$

alors la trajectoire du mouvement est plane.

En dérivant (*) par rapport à t on obtient

$$m\boldsymbol{r}''' = a'\boldsymbol{r} + a\boldsymbol{r}' = m\frac{a'}{a}\boldsymbol{r}'' + a\boldsymbol{r}',$$

c'est-à-dire que les vecteurs $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}''$, $\boldsymbol{r}'''$ sont coplanaires à tout instant t. Si les vecteurs $\boldsymbol{r}'$ et $\boldsymbol{r}''$ ne sont pas colinéaires, la trajectoire sera plane d'après l'exercice **34**. Si $\boldsymbol{r}'$ et $\boldsymbol{r}''$ sont colinéaires, la trajectoire sera rectiligne en vertu de l'exercice **35**.

40. La démonstration résulte du fait que l'inverse de la fonction $y = x^3$ n'est pas lisse.

45. Soit $(I, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t))$, où $I =]\alpha, \beta[$, une représentation paramétrique de la courbe γ. Alors la représentation paramétrique $(J, \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\tau))$, où $J =]-\beta, -\alpha[$, $\boldsymbol{\rho}(\tau) = \boldsymbol{r}(-\tau)$ est équivalente à $(I, \boldsymbol{r})$. Les représentations paramétriques $(I, \boldsymbol{r})$ et $(J, \boldsymbol{\rho})$ définissent des courbes orientées différentes. Toute représentation paramétrique de la courbe γ est reliée soit avec $(I, \boldsymbol{r})$, soit avec $(J, \boldsymbol{\rho})$ par un changement de représentation paramétrique de dérivée positive.

49. La condition nécessaire est évidente. Prouvons la condition suffisante. Soient $\boldsymbol{r}_0$ une valeur arbitraire fixe de la fonction vectorielle donnée, $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire d'une normale au plan donné. Alors $\partial_u\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, $\partial_v\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$. Considérons la fonction $f(u, v) = (\boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}$. On a $\partial_u f = \partial_u\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, $\partial_v f = \partial_v\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$; donc $f(u, v) = \text{const}$. Or $f(u_0, v_0) = (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n} = 0$, donc $f(u, v) \equiv 0$, c'est-à-dire que $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n} = 0$. Ceci est l'équation du plan.

50. Un cylindre parabolique.

51. Un cylindre elliptique.

52. Un cylindre hyperbolique.

53. Un paraboloïde elliptique.

55. $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u\sin v$, $z = R\sin u$ (fig. 5).

56. $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos u\sin v$, $z = c\sin u$ (fig. 6).

57. $x = \sqrt{p}\,u\cos v$, $y = \sqrt{q}\,u\sin v$, $z = u^2/2$ (fig. 7).

58. $x = a\,\text{ch}\,u\cos v$, $y = b\,\text{ch}\,u\sin v$, $z = c\,\text{sh}\,u$ (fig. 8).

59. $x = a\,\text{sh}\,u\cos v$, $y = b\,\text{sh}\,u\sin v$, $z = c\,\text{ch}\,v$ (fig. 9).

60. $x = a\cos v$, $y = b\sin v$, $z = u$ (fig. 10).

61. $x = u$, $y = u^2$, $z = v$ (fig. 11).

62. $x = a\,\text{ch}\,u$, $y = b\,\text{sh}\,u$, $z = v$ (fig. 12).

63. $x = au\cos v$, $y = bu\sin v$, $z = cu$ (fig. 13).

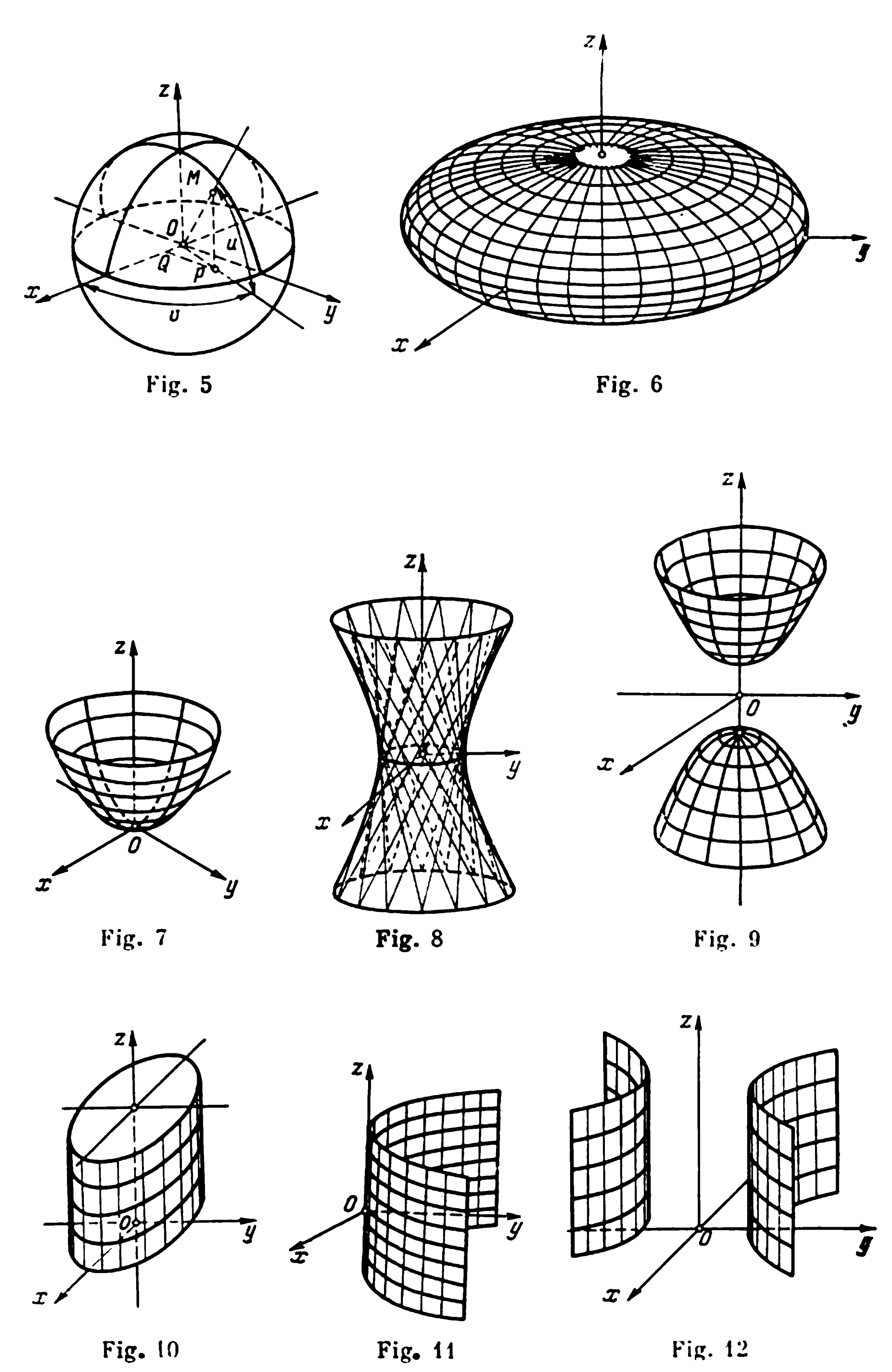


Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

66. a) Non. Par exemple, pour la fonction vectorielle

$$x=\frac{2au^2}{1+u^2}, \quad y=\frac{au(u^2-1)}{1+u^2}, \quad z=v$$

l'ensemble indiqué est un cylindre dont la génératrice est une strophoïde.

67. a) Un plan privé d'une demi-droite; b) $0<r<\infty$, $0<\varphi<2\pi$; c) $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$.

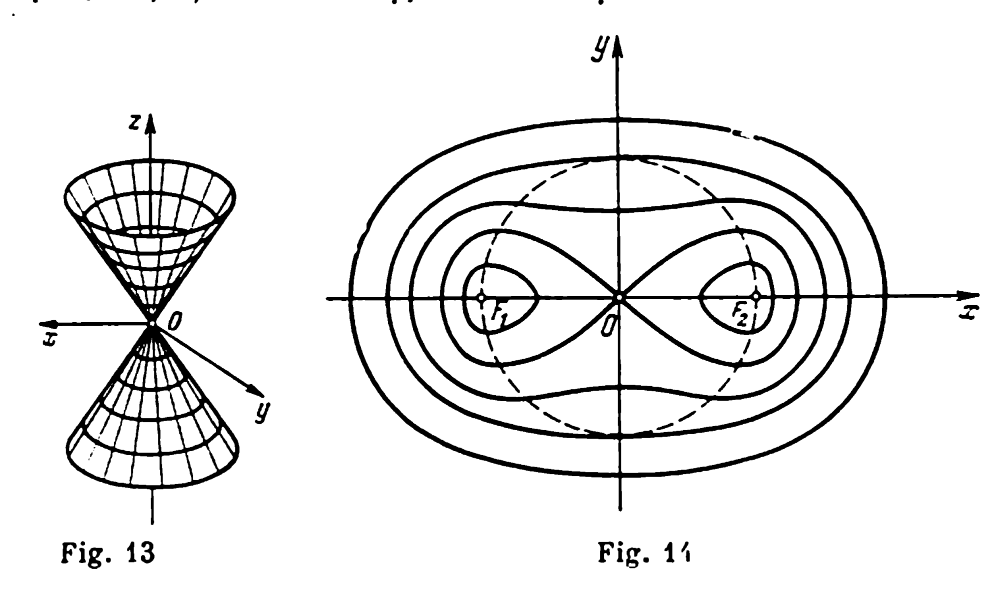


Fig. 13 Fig. 14

68. Choisissons pour axe Ox la droite passant par F_1 et F_2 (fig. 14) orientée dans le sens de F_1 à F_2 et pour origine des coordonnées, le milieu de F_1F_2. Alors: F_1 $(-b, 0)$, F_2 $(b, 0)$. Pour un point arbitraire M (x, y) de la courbe cherchée on a

$$|F_1M|=\sqrt{(x+b)^2+y^2}, \quad |F_2M|=\sqrt{(x-b)^2+y^2}.$$

Par hypothèse,

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2}\sqrt{(x-b)^2+y^2}=a^2. \qquad (*)$$

Ceci est l'équation de la courbe cherchée. Eliminons les radicaux:

$$[(x+b)^2+y^2]\,[(x-b)^2+y^2]=a^4. \qquad (**)$$

Il est évident que (*) et (**) sont équivalentes. Toutes réductions faites, on obtient

$$(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)=a^4-b^4;$$

c'est l'équation des *ovales de Cassini* (cf. fig. 14). En passant aux coordonnées polaires $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ on obtient

$$r=b\sqrt{\cos 2\varphi\pm\sqrt{\frac{a^4}{b^4}-\sin^2 2\varphi}}.$$

Ceci est l'équation de la courbe cherchée en coordonnées polaires. Pour $a = b$, cette courbe est une *lemniscate de Bernoulli* (fig. 15). Son équation s'écrit :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2), \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Pour $a < b$, la figure ne sera l'image d'aucune courbe, ni d'aucune ligne. La lemniscate de Bernoulli ($a = b$) est l'image d'une courbe,

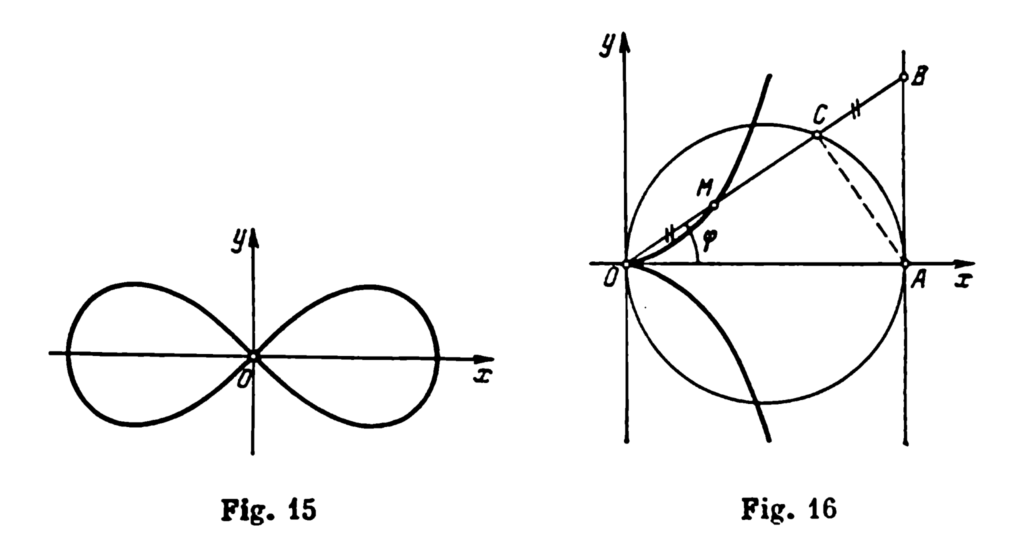


Fig. 15 Fig. 16

mais n'est pas une ligne. Pour $a > b$, l'ovale de Cassini est une ligne et l'image d'une courbe.

69. $x^3 = y^2 (2a - x)$, $r = 2a \sin^2 \varphi/\cos \varphi$ (fig. 16). Les équations paramétriques peuvent se ramener à la forme

$$x = 2a \sin^2 \varphi, \quad y = 2a \sin^3 \varphi/\cos \varphi,$$

ou

$$x = \frac{2a}{1+t^2}, \quad y = \frac{2a}{t(1+t^2)} \quad (t = \operatorname{cotg} \varphi).$$

La cissoïde de Dioclès n'est pas une ligne.

70. $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$; $x = a \operatorname{cotg} t$, $y = a \sin^2 t$ (fig. (17).

71. $r = a\varphi$ (fig. 18).

72. $r = r_0 e^{k\varphi}$, où $\varphi = \omega t$ (fig. 19).

73. $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$, $r = a \sin 2\varphi$ (fig. 20).

La rose à quatre branches est l'image d'une courbe, mais n'est pas une ligne.

74. $r = 2a \cos \varphi \pm 2b$, $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4b^2 (x^2 + y^2)$ (fig. 21). Pour la cardioïde $b = a$ (fig. 22). Le limaçon de Pascal est une

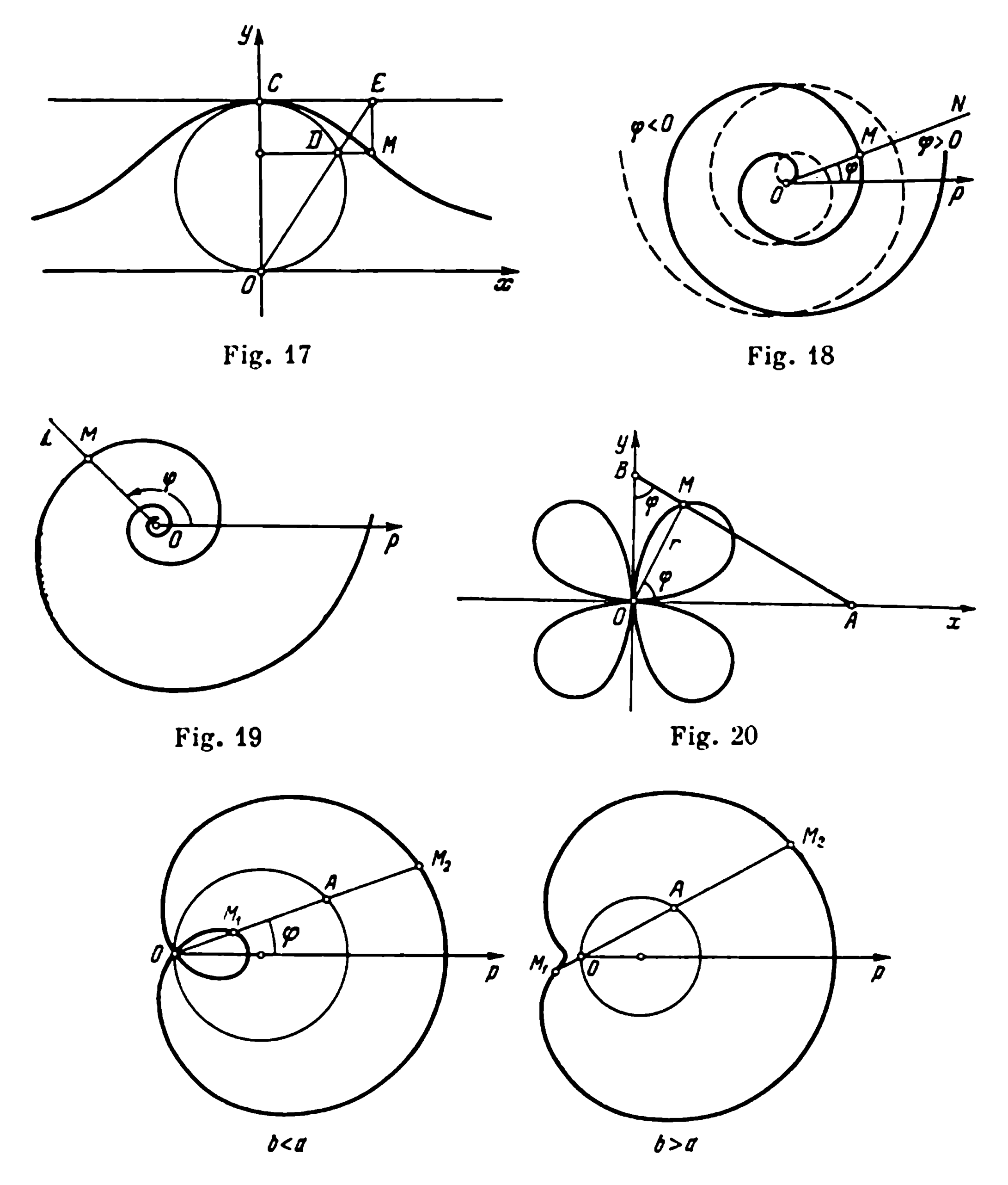


Fig. 17

Fig. 18

Fig. 19

Fig. 20

Fig. 21

ligne pour $b > a$.

75. $r = \frac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}$; $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$;

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}, \quad t = \frac{r}{a}.$$

La strophoïde Φ (fig. 23) est une courbe mais pas une ligne. La figure $\Phi \setminus A$ est une ligne mais pas une courbe.

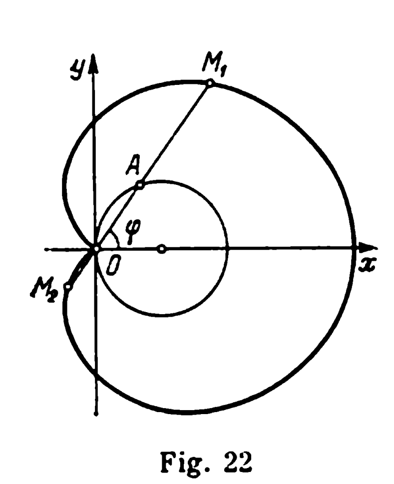


Fig. 22

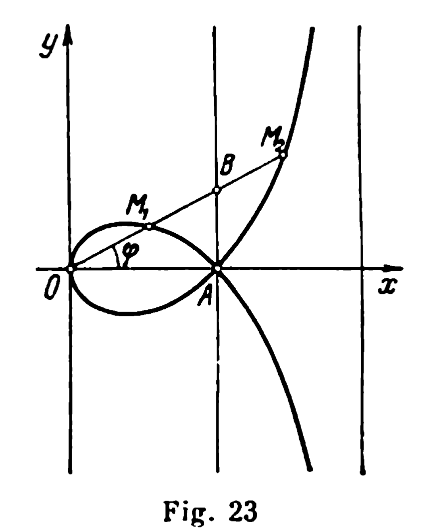
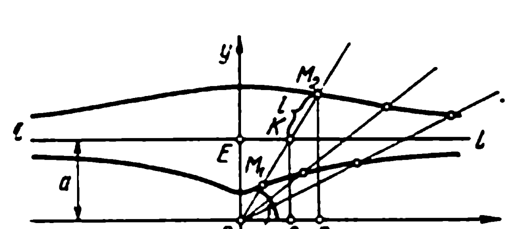


Fig. 23



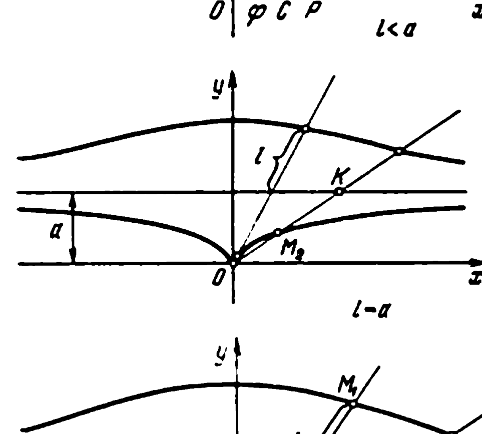


Fig. 24

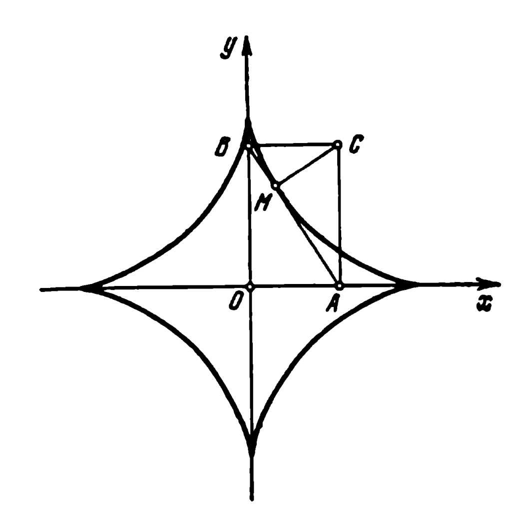


Fig. 25

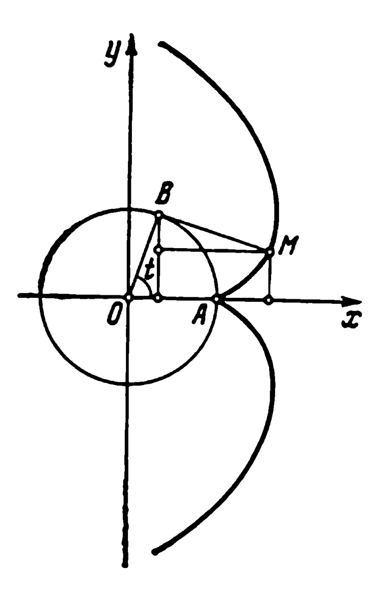


Fig. 26

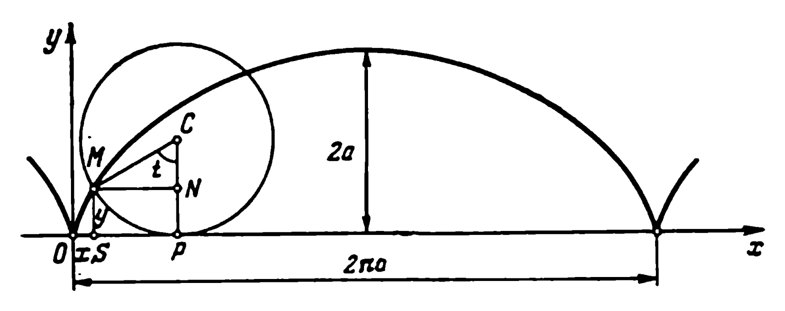


Fig. 27

76. $r = \frac{a}{\sin \varphi} \pm l$; $(x^2+y^2)(y-a)^2 - l^2y^2 = 0$ (fig. 24). Aucune conchoïde de Nicomède n'est l'image d'une coubre. La conchoïde est une ligne pour $l < a$.

77. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 25). Non.

78. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

I n d i c a t i o n. Avant le déroulement, l'extrémité du fil se trouve au point A (fig. 26). Lorsqu'on déroule le fil tendu, celui-ci se confond avec la tangente au cercle, et de plus

$$|BM| = \overset{\frown}{BA} = at.$$

79. Formons l'équation de la cycloïde. Prenons la droite donnée pour axe Ox et supposons que la position initiale du point M est l'origine des coordonnées (fig. 27). Soit $M(x, y)$ une position quelconque de M. Soient C le centre du cercle à l'instant considéré, t

l'angle du rayon CM avec la perpendiculaire CP abaissée de C sur Ox, S, la projection de M sur Ox, N, sur CP.

On a alors

$$x = OS = OP - SP = \overset{\frown}{MP} - SP = at - a \sin t = a\,(t - \sin t).$$

De façon analogue,

$$y = SM = PN = PC - NC = a - a \cos t = a\,(1 - \cos t).$$

Dans le cas général

$$x = at - d \sin t, \quad y = a - d \cos t \qquad \text{(fig. 28).}$$

80. Plaçons l'origine des coordonnées au centre du cercle fixe. Supposons que la position initiale du point M est confondue avec le point A de tangence des deux cercles. Faisons passer l'axe des abscisses par le point A (fig. 29) et posons $t = \widehat{MO_1N}$, $m = r/R$.

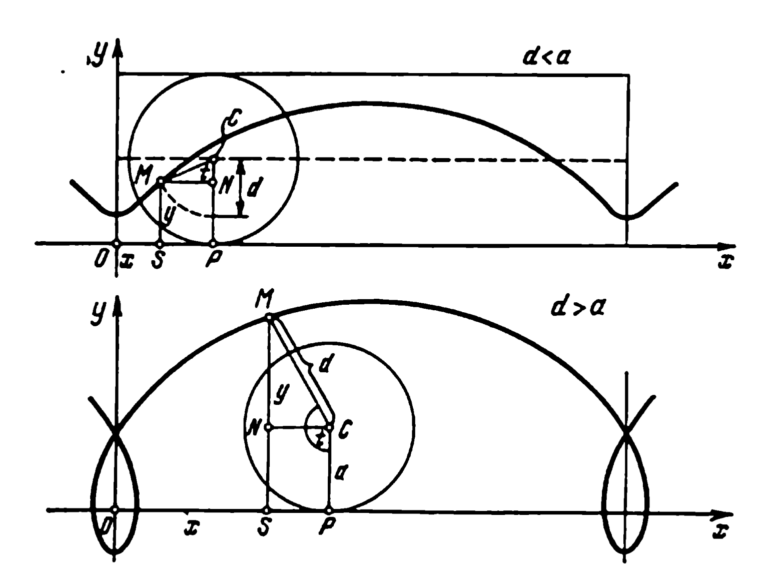


Fig. 28

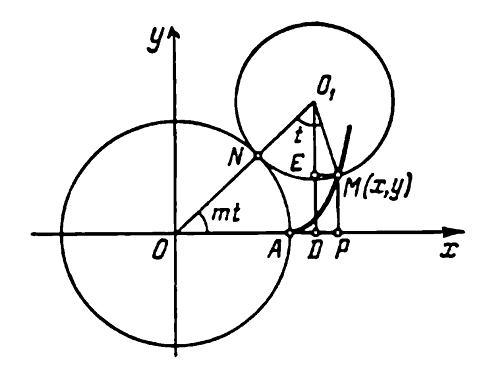


Fig. 29

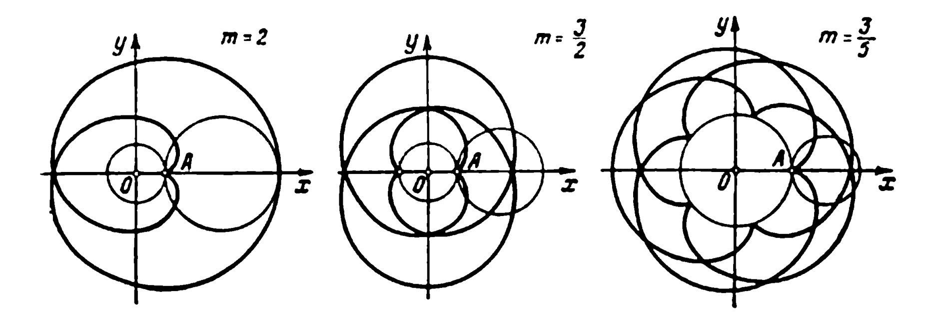


Fig. 30

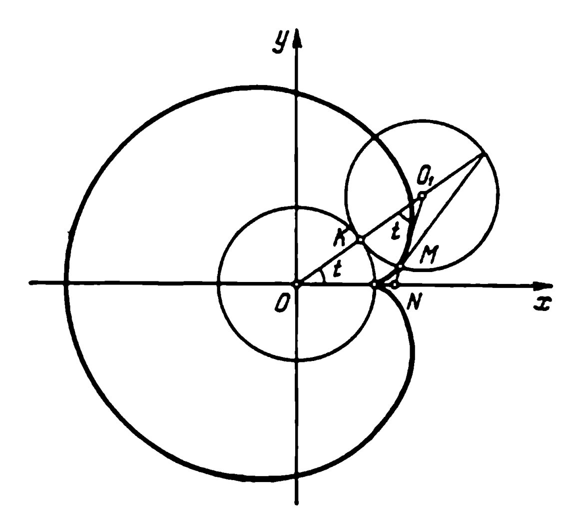


Fig. 31

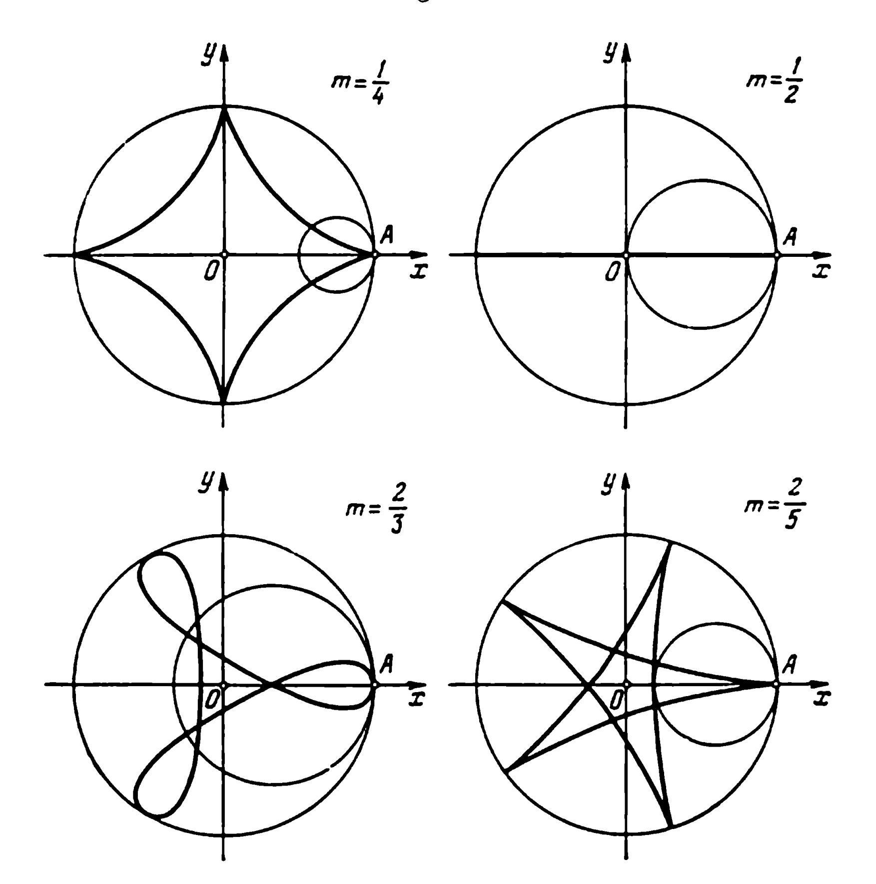


Fig. 32

Comme

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MN}, \quad \text{ou} \quad R \cdot \widehat{NOA} = rt,$$

il vient

$$\widehat{NOA} = \frac{r}{R} t = mt.$$

On a

$x = OP = OD + DP = OD + EM =$

$$= (R + r) \cos mt + r \sin \widehat{MO_1E},$$

$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r) \sin mt - r \cos \widehat{MO_1E}.$$

Comme

$$\sin \widehat{MO_1E} = \sin (t - \widehat{OO_1D}) = \sin \left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right] =$$

$$= -\cos (t + mt), \ \cos \widehat{MO_1E} = \sin (t + mt), \ r = mR,$$

alors

$$x = (R + mR) \cos mt - mR \cos (t + mt),$$

$$y = (R + mR) \sin mt - mR \sin (t + mt).$$

En éliminant m, on obtient

$$x = (R + r) \cos \frac{r}{R} t - r \cos \frac{R + r}{R} t,$$

$$y = (R + r) \sin \frac{r}{R} t - r \sin \frac{R + r}{R} t \ \text{(fig. 30)}.$$

Pour $r = R$, on obtient une cardioïde (fig. 31).

81. $x = (R - mR) \cos mt + mR \cos (t - mt)$,

$y = (R - mR) \sin mt - mR \sin (t - mt), \quad r = mR.$

Pour $R = 4r$, on obtient une *astroïde*, pour $R = 2r$ un *segment de droite* (fig. 32).

82. Les points M et N appartiennent à l'image de la courbe, mais pas le point P. La courbe coupe l'axe Ox en O (0, 0), l'axe Oy en O (0, 0) et A (0, —2). L'équation implicite est: $y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$.

83. a) $x = \frac{2a}{1 + k^2}, \quad y = \frac{2ak}{1 + k^2}$;

b) $x = a + a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi$.

84. Une parabole.

85. La portion de droite $x - y - 2 = 0$, $x \geqslant 2$.

86. Le segment de droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ compris entre les axes de coordonnées.

87. Un demi-cercle.

88. Une branche d'hyperbole.

89. La droite $x + 2y - 1 = 0$.

90. $y = a \operatorname{ch}(x/a)$. Cette ligne est une *chaînette* (fig. 33).

91. Le cercle $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

92. $t = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi$ (fig. 34).

93. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; on passe d'une représentation paramétrique à l'autre en posant $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ (fig. 35).

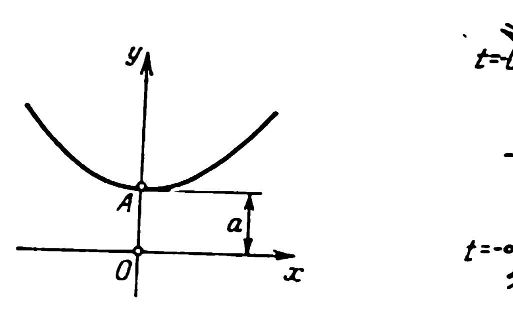


Fig. 33

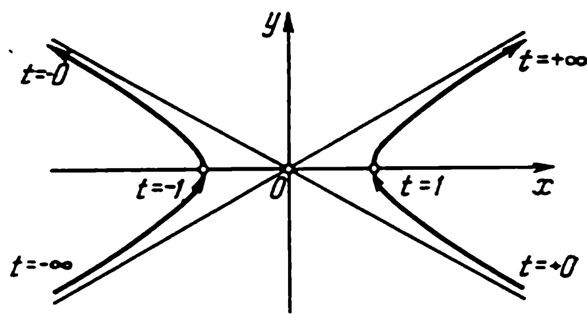


Fig. 34

94. Le cercle $x^2 + y^2 = 16$.

95. Le cercle $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

96. La droite $x = a$. 97. La droite $y = b$.

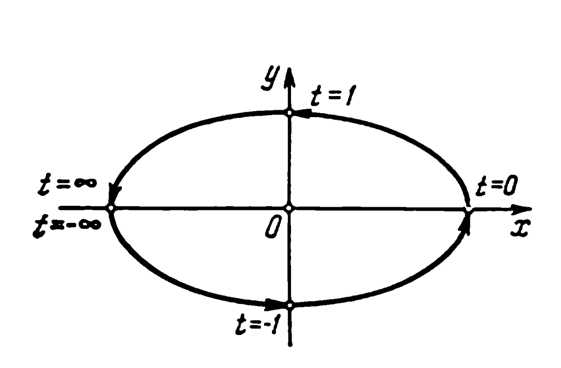


Fig. 35

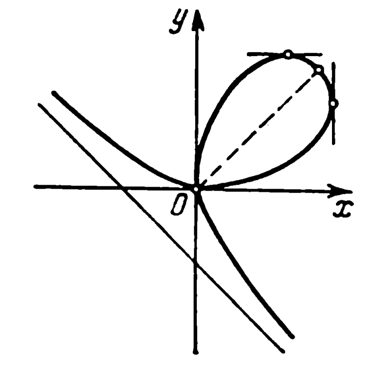


Fig. 36

98. L'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

99. L'hyperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

100. La parabole $y^2 = 4x + 4$. **101.** L'hyperbole $x^2 - y^2 = a^2$.

102. Le cercle $x^2 + y^2 - by = 0$.

103. La parabole $y^2 = -4x + 4$. **104.** La parabole $y^2 = 4x + 4$.

105. $x=-\frac{\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}$, $y=-\frac{t\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}$.

I n d i c a t i o n. Prendre pour paramètre le coefficient angulaire d'une droite $y = tx$ passant par l'origine des coordonnées et un point de la ligne.

106. $x=\frac{2a}{1+t^2}$, $y=\frac{2at}{1+t^2}$.

107. $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$; (*folium de Descartes*, fig. 36).

108. $x=\frac{2at^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2at^3}{1+t^2}$ (*cissoïde de Dioclès*).

109. $x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$, $y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$.

En posant $\operatorname{tg}(\varphi/2) = t$, on obtient l'équation de la cardioïde

$$x=\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \qquad y=\frac{4at}{(1+t^2)^2}.$$

110. $x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$ $y=\frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$ (strophoïde).

Ces équations se déduisent à partir de celles de l'exercice 75 moyennant le changement $x = x' + a$, $y = y'$.

111. Tangente en A: $2x - y + 2 = 0$, normale en A: $x + 2y + 1 = 0$; tangente en B: $4x - y + 3 = 0$, normale en B: $x + 4y - 12 = 0$; tangente en C: $6x - y + 2 = 0$, normale en C: $x + 6y - 49 = 0$.

112. Tangente en A : $y = 0$, normale en A : $x = 0$; tangente en B: $3x - y - 2 = 0$, normale en B: $x + 3y - 4 = 0$.

113. Tangente en A (0, 0): $y = x$, normale en A: $x = -y$; tangente en B ($\pi/2$, 1): $y = 1$, normale en B ($\pi/2$, 1): $x = \pi/2$; tangente en C (π, 0): $x + y - \pi = 0$, normale en C (π, 0): $x - y - \pi = 0$.

114. En A (0, 0), tangente: $y = x$, normale: $y = -x$; en B ($\pi/4$, 1), tangente: $2x - y + 1 - \pi/2 = 0$, normale: $x + 2y - 2 - \pi/4 = 0$.

115. Tangente: $2x - y + 4 = 0$, normale: $x + 2y - 3 = 0$.

116. Tangente: $2x \sin t + 2y \cos t - a \sin 2t = 0$, normale: $x \cos t - y \sin t - a \cos 2t = 0$.

117. Pour $t = (2k + 1)\pi$, où k est un entier quelconque, la tangente est $y = 2a$ et la normale $x = (2k + 1) a\pi$. En tous les autres points, la tangente est $x - y \operatorname{tg}(t/2) + a(2 \operatorname{tg}(t/2) - t) = 0$ et la normale $x \operatorname{tg}(t/2) + y - at \operatorname{tg}(t/2) = 0$.

118. Tangente: $x = a(\cos t - \lambda \sin t)$, $y = b(\sin t + \lambda \cos t)$ ou $bx \cos t + ay \sin t - ab = 0$, la normale: $x = (a + b\lambda) \cos t$, $y = (b + a\lambda) \sin t$ ou

$$ax \sin t - by \cos t + (b^2 - a^2) \sin t \cos t = 0.$$

119. Tangente $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \lambda \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \lambda \frac{b}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$, ou $\frac{b}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) x - \frac{a}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) y - ab = 0$, normale $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) - \frac{\lambda b}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{\lambda a}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$, ou $\frac{a}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) x + \frac{b}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) y - \frac{t^4 - 1}{4t^2}(a^2 + b^2) = 0$.

120. Tangente: $x + y - 3a = 0$, normale: $x - y = 0$.

121. Tangente: $4x - 2y - a = 0$, normale: $2x + 4y - 3a = 0$.

122. Tangente: $x(x^2 + y^2 - a^2)(X - x) + y(x^2 + y^2 + a^2) \times (Y - y) = 0$, normale: $y(x^2 + y^2 + a^2)(X - x) - x(x^2 + y^2 - a^2)(Y - y) = 0$.

123. Tangente: $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1$, normale: $\frac{(X - x) a^2}{x} - \frac{(Y - y) b^2}{y} = 0$.

124. Tangente: $\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1$, normale: $\frac{(X - x) a^2}{x} + \frac{(Y - y) b^2}{y} = 0$.

125. Tangente: $yY = p(X + x)$, normale: $y(X - x) + p(Y - y) = 0$.

126. Tangente: $(\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) x - (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) y - a\varphi^2 = 0$, normale: $(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) x + (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) y - a\varphi = 0$.

127. Tangente: $y - a = 0$, normale: $x - a = 0$.

128. $A(1/2, 1/4)$. **129.** Non.

131. $y = 4x - 4$. **132.** $A(2, -3)$.

133. $b = -1$, $c = -1$.

134. $M_1(2/3, 4/9)$, $M_2(2/3, 8/27)$.

136. $y = 2x + 3$, $y = 2x + \frac{49}{27}$.

137. $y+1=(x+7)/3$.

139. $(x \pm y)\sqrt{2}=-a, \quad (x \pm y)\sqrt{2}=a$.

143. $M_1\,(0,\ 0),\ M_2\,(4,\ 4);\ \varphi_1=\pi/2,\ \varphi_2=\operatorname{arctg}(3/4)$.

144. $M_1\,(0,\ 3),\ M_2\,(0,\ -3);\ \varphi_1=\varphi_2=\pi/4$.

145. $M_1\,(1,\ 2),\ M_2\,(1,\ -2);\ \varphi_1=\varphi_2=\pi/2$.

146. $M_k\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\varphi_k=\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$, où k est un entier arbitraire.

152. Du triangle M_1M_2A (fig. 37) on déduit que $\mu_1=\varphi/2$ (voir exercice 151), $\mu_2=(\varphi+\pi)/2$, $\widehat{M_1AM_2}=\mu_2-\mu_1=\pi/2$.

160. En faisant $Y=0$, $X=x_T$ dans l'équation de la tangente $Y-y=y'(X-x)$ on obtient $x_T-x=-y/y'$. Donc, $|PT|=$

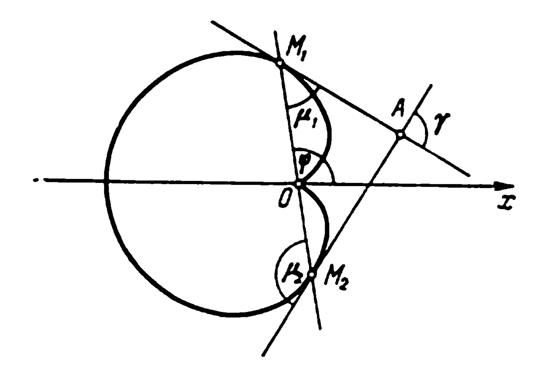


Fig. 37

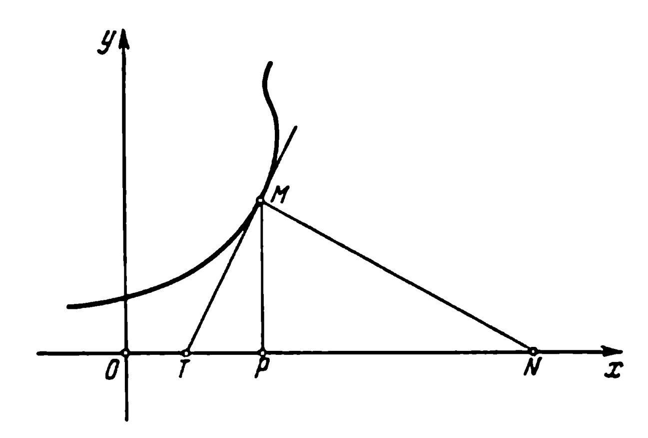


Fig. 38

$=|y/y'|$ (fig. 38). Les autres formules se déduisent de façon analogue.

161. $|MT|=\sqrt{5}/2$, $|PT|=1/2$, $|MN|=\sqrt{5}$, $|PN|=2$.

162. $|MT| = |\mathrm{cth}\, x|\, \mathrm{ch}\, x$, $|PT| = |\mathrm{cth}\, x|$, $|MN| =$ $= \mathrm{ch}^2\, x$, $|PN| = |\mathrm{sh}\, 2x|/2$.

163. $y^2 = \pm 2kx + c$, où c est une constante arbitraire.

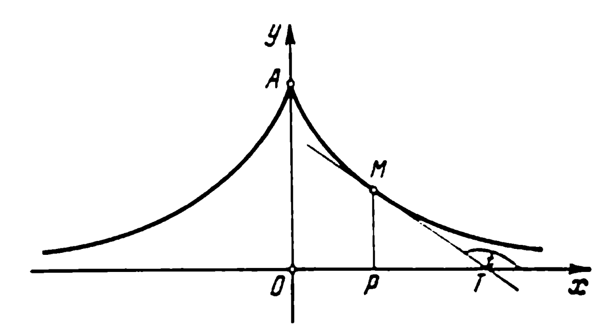


Fig. 39

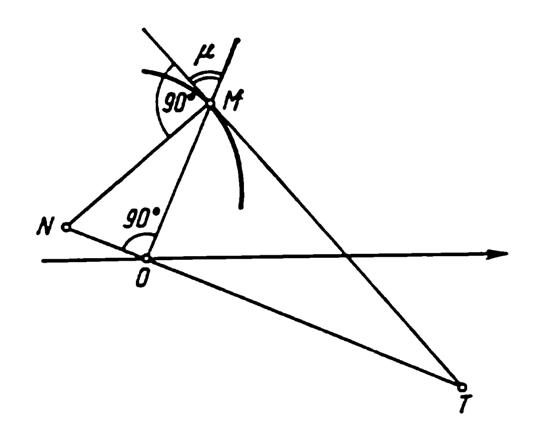


Fig. 40

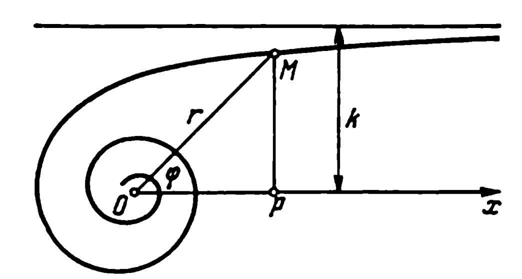


Fig. 41

164. $y = ce^{\pm x/k}$, où c est une constante arbitraire.

166. $x = a\,(\ln \mathrm{tg}\,(t/2) + \cos t) + c$, $y = a \sin t$, où t est l'angle de la tangente avec l'axe des abscisses. C'est une famille de lignes congrues appelées *tractrices*. Sur la figure 39 est représentée la tractrice correspondant à $c = 0$.

167. $S = \pi a^2/2$.

168. Le triangle MOT (fig. 40) étant rectangle, on a $|OT| = |OM| \operatorname{tg} \mu$. Comme $\operatorname{tg} \mu = |r/r'|$ (cf. exercice 150), il vient

$$|OT| = r^2/|r'|.$$

Les autres formules s'établissent de façon analogue.

169. $r = \pm \frac{k}{\varphi - \varphi_0}$, où φ_0 est un angle arbitraire (sur la figure 41 l'angle φ_0 est nul). Ces lignes s'appellent *spirales hyperboliques*.

170. Les spirales d'Archimède.

171. Les cercles $r = \pm k \sin(\varphi - \varphi_0)$ (cf. exercice 102).

177. Contact d'ordre deux.

178. Contact d'ordre un. **180.** Contact d'ordre trois.

181. Pour $a = -3$ et $b = 3$. **182.** $x^2 + y^2 - y = 0$.

183. $(x + 2y)^2 - 20x + 14y + 19 = 0$. Contact d'ordre trois.

184. Si $f(x)$ admet pour $x = 0$ des dérivées jusqu'à l'ordre n inclus, alors on a la solution

$$y = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

Dans le cas contraire l'exercice n'a pas de solution.

185. a) $\frac{(x-\pi R)^2}{12R^2} + \frac{(y+R)^2}{9R^2} = 1$, contact d'ordre 5 ; b) $\frac{(x-\pi R)^2}{-12R^2} + \frac{(y-5R)^2}{9R^2} = 1$, contact d'ordre 5 ; c) $(x-\pi R)^2 = -8R(y-2R)$, contact d'ordre 3.

186. $x = 3$, $y = 0$. **187.** $x = \pm 4$, $y = 0$.

188. $y = 0$. **189.** $y = x - 4$, $x = 0$.

190. $y = x - 2$, $x = -2$. **191.** $x = 0$.

192. $x = 3$, $y = -4$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

193. $y = -\frac{1}{2}$, $y = 2x + \frac{1}{2}$.

194. $x = -\frac{1}{2}$, $2x - 4y - 3 = 0$. **195.** $y = \pm 2$, $x = 1$.

196. $x = 0$. **197.** $y = \pm x$.

198. $y = a$. **199.** $x = 2a$.

200, 201. $O\,(0, 0)$ est un point de self-intersection.

202, 203. $O\,(0, 0)$ est un point isolé.

204. $O\,(0, 0)$ est un point autotangentiel.

205. O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce. Tangente: $y = 0$.

206. O (0, 0). Pour $l > a$ le point O (0, 0) est un point de self-intersection avec les tangentes $y = \pm \frac{ax}{\sqrt{l^2 - a^2}}$. Pour $l < a$, c'est un point isolé. Pour $l = a$, c'est un point de rebroussement de première espèce avec la tangente $x = 0$ (cf. fig. 24).

207. A (a, 0) est un point de self-intersection. Tangentes: $y = \pm(x - a)$.

208. O (0, 0) est un point de self-intersection. Tangentes: $y = \pm x$.

209. A (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce. Tangente: $y = 0$.

210-212. N'existent pas (fig. 42, 43, 44).

214. $r\ddot{r} - 2\dot{r}^2 - r^2 = 0$.

215. La fonction est définie pour toutes les valeurs de x sauf pour $x = \pm 1$. Elle ne possède pas de points singuliers. Le graphe

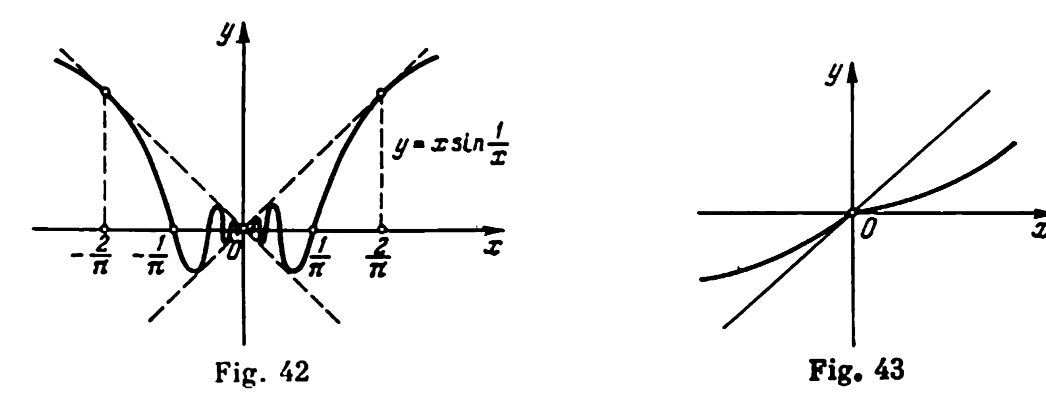


Fig. 42

Fig. 43

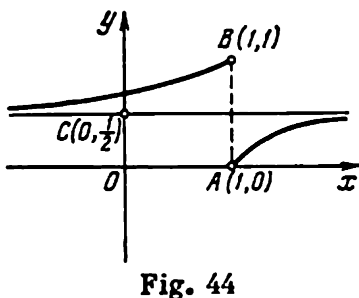


Fig. 44

est tangent en O à l'axe Ox. Asymptotes: $x = \pm 1$, $y = 1$. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy (fig. 45).

216. La fonction n'est définie que pour $x = \pm\sqrt{3}$, $y_{max} = y(-3) = -9/2$, $y_{min} = y(3) = 9/2$. Tous les extrémums considérés ici et dans la suite sont des extrémums locaux. O (0, 0) est un point d'inflexion avec une tangente horizontale. Asymptotes: $y = x$, $x = \pm\sqrt{3}$ (fig. 46).

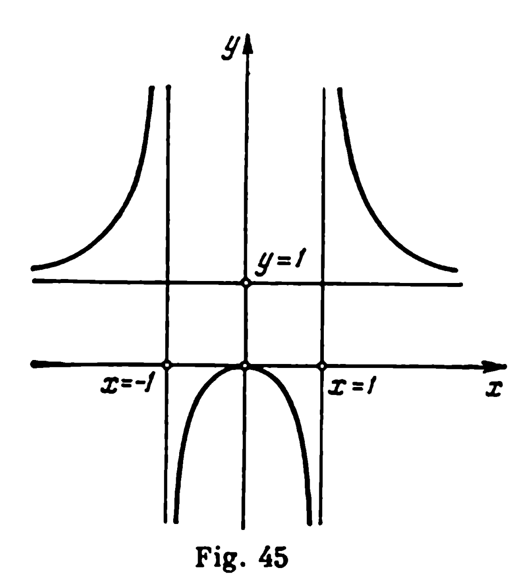


Fig. 45

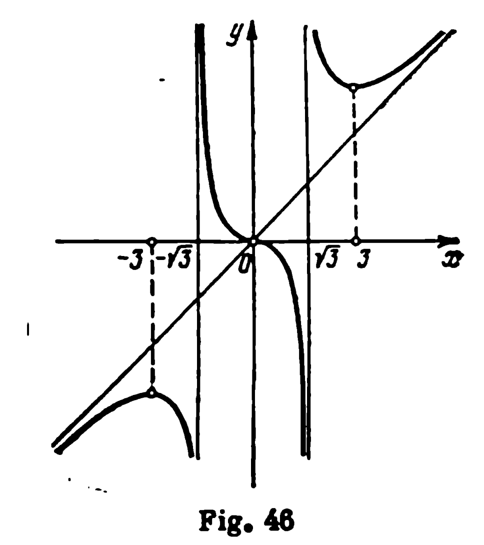


Fig. 46

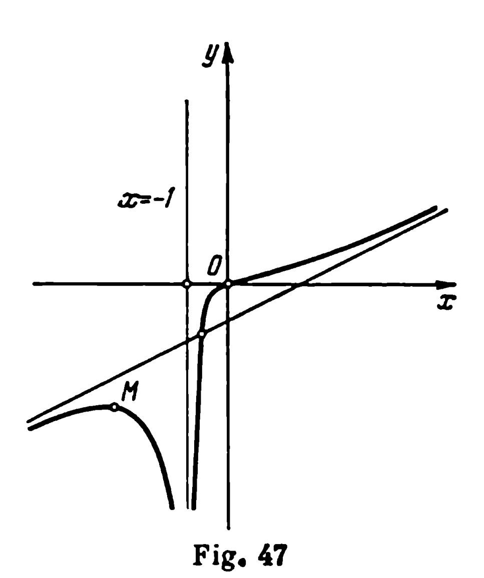


Fig. 47

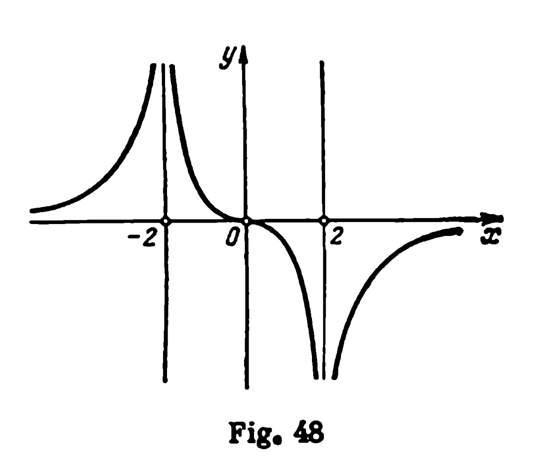


Fig. 48

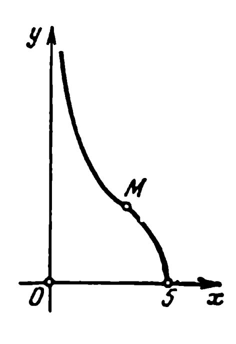


Fig. 49

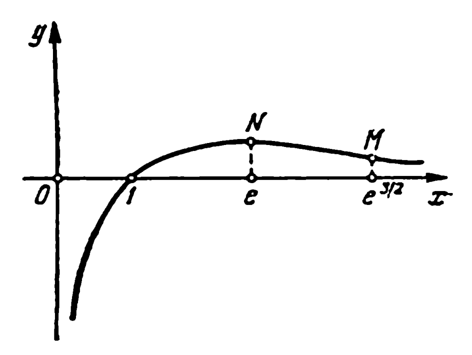


Fig. 50

217. La fonction n'est définie que pour $x = -1$. L'origine des coordonnées est un point d'inflexion avec la tangente $y = 0$. La tangente en $M\,(-3,\ -27/8)$ est également parallèle à Ox. Asymptotes: $x + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ (fig. 47).

218. La fonction n'est pas définie pour $x = \pm 2$; $O\,(0,\ 0)$ est un point d'inflexion en lequel la tangente est $y = 0$. Asymptotes: $x = \pm 2$, $y = 0$ (fig. 48).

219. Domaine de définition $]0,\ 5]$; $M\,(5/\sqrt[3]{4},\ 5/\sqrt[3]{4})$ est un point d'inflexion en lequel la tangente fait un angle de 135° avec Ox. Asymptote: $x = 0$ (fig. 49).

220. La fonction est définie pour $x > 0$; $y_{max} = y(e) = 1/e$; $M\left(\sqrt{e^3},\ \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$ est un point d'inflexion. Asymptotes: $x = 0$, $y = 0$ (fig. 50).

221. La fonction est définie et positive pour tous les x; $y_{max} = y(0) = 1$; $M_1\left(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{e}\right)$, $M_2\left(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{e}\right)$ sont des points d'inflexion. Asymptote: $y = 0$ (fig. 51).

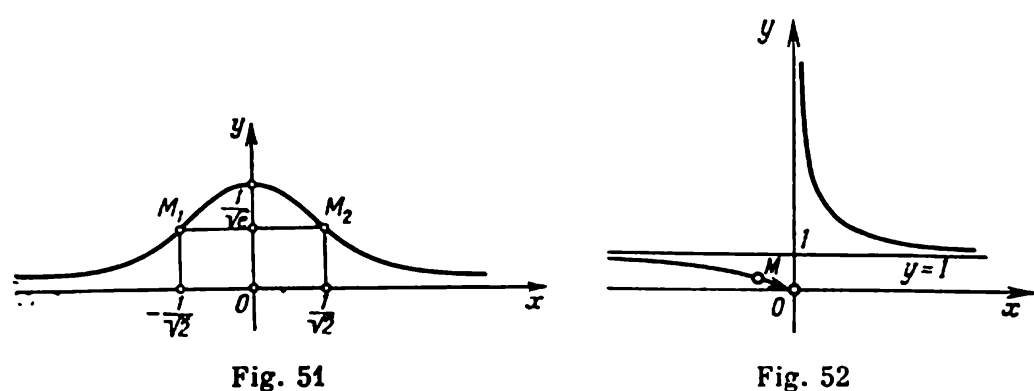


Fig. 51 Fig. 52

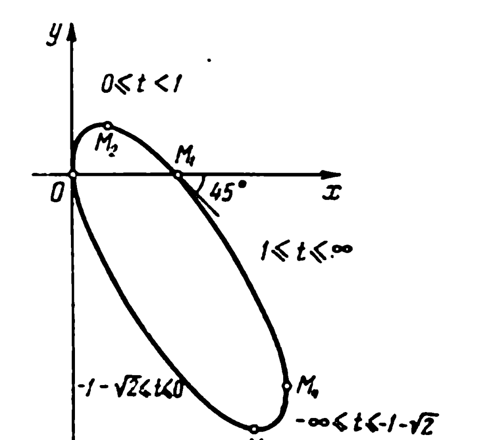


Fig. 53

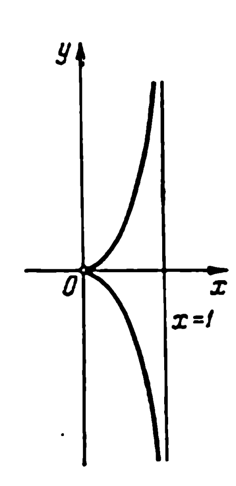


Fig. 54

222. La fonction est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$; M $(-1/2, 1/e^2)$ est un point d'inflexion. Asymptotes: $y = 1$, $x = 0$ (fig. 52).

223. La courbe est symétrique par rapport à la bissectrice du premier et du troisième quadrant. Asymptote: $x + y + a = 0$; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel $x = 0$, $y = 0$ (cf. fig. 36) sont tangents à la courbe.

224. La courbe est fermée et ne présente pas de points singuliers. O (0, 0) et M_1 (1/2, 0) sont les points d'intersection avec les axes. Les tangentes en M_2 $(t = -1 + \sqrt{2})$ et M_3 $(t = -1 - \sqrt{2})$ sont parallèles à l'axe Ox. Les tangentes en O $(t = 0)$ et M_4 $(t = \pm\infty)$ sont parallèles à l'axe Oy. En explicitant l'équation de la courbe, on constate qu'elle définit une ellipse (fig. 53).

225. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox et est située dans la bande $0 \leqslant x < 1$. Asymptote: $x = 1$; O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce (fig. 54).

226. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox et est située dans la bande $0 \leqslant x < 1$. Asymptote: $x = 1$. La courbe coupe les axes de coordonnées aux points O (0, 0) et M_4 (1/2, 0). La courbe passe deux fois par le point M_1 (pour $t = +1$ et $t = -1$), les coefficients angulaires des tangentes en M_1 sont $k = +2$ et $k = -2$. Pas de points singuliers. La courbe admet une tangente parallèle à Oy en l'origine des coordonnées, et des tangentes parallèles à l'axe Ox aux points M_2 et M_3 correspondant aux valeurs $t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$ du paramètre (fig. 55).

227. Pour $t = 0$, la tangente au point O (0, 0) est confondue avec l'axe Oy. Les tangentes en M_1 (1, 4/3) et M_2 (1, −4/3) (pour $t = \pm 1$) sont parallèles à l'axe Ox. La courbe passe deux fois par le point M_3 (3, 0) $(t = \pm\sqrt{3})$. Pas d'asymptotes (fig. 56).

228. Asymptotes: $x = 1/2$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $y = x + 1$. La courbe coupe les axes de coordonnées en l'origine des coordonnées seulement. O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce. La courbe présente une tangente parallèle à l'axe Ox aux points O, M_1 et M_2 $(t = \pm\sqrt{3})$ et une tangente parallèle à l'axe Oy au point M_3 $(t = 2)$ (fig. 57).

229. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox. Asymptotes: $x = -1$, $y = \pm\left(x - \frac{1}{2}\right)$. La première asymptote ne coupe pas la courbe, la deuxième et la troisième la coupe aux points M_1 $(t = -1/2)$ et M_2 $(t = 1/2)$; O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce. La courbe possède des tangentes parallèles à l'axe Ox aux points M_3, M_4 $(t = \pm\sqrt{3})$ (fig. 58).

230. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox. Elle ne

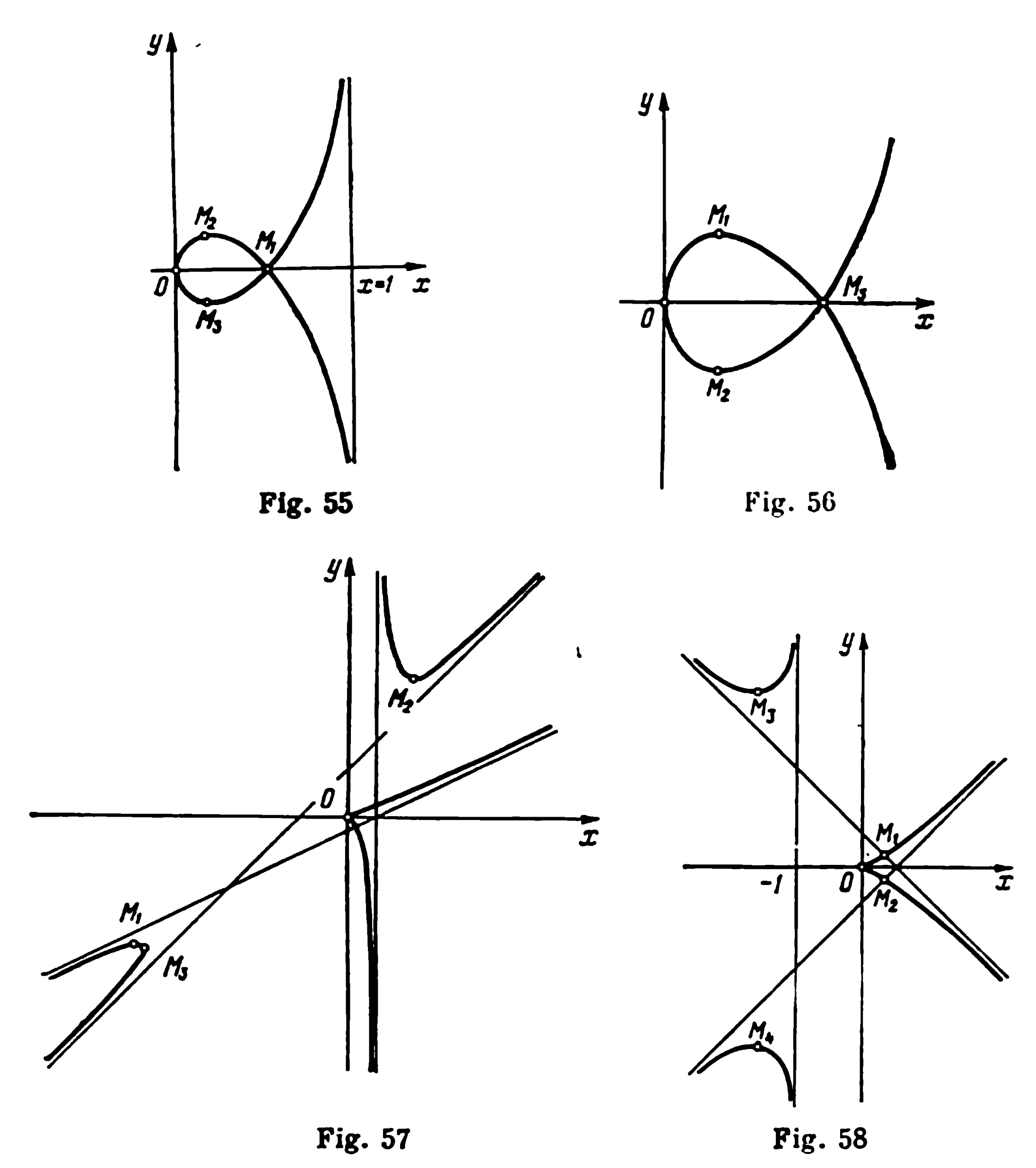


Fig. 55 Fig. 56

Fig. 57 Fig. 58

possède pas d'asymptotes ni de points singuliers. Les points $M_1\left(\frac{4}{3},\right.$ $\left.\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ et $M_2\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ correspondant à $t = \pm\sqrt{3}/3$ sont des points d'inflexion. La courbe est tangente à l'axe Oy en l'origine des coordonnées (fig. 59).

231. Pas d'asymptotes. O (0, 0) est un point de rebroussement de deuxième espèce en lequel la tangente est $x = 0$. La courbe coupe l'axe Ox en O et M_1 (1, 0). Le point M_2 ($t = -\sqrt[3]{0,8}$) est un point d'inflexion. La courbe présente une tangente en M_3 ($t = \sqrt[3]{0,4}$), parallèle à l'axe Ox (fig. 60).

232. Asymptote: $y = 1$; O (0, 0) est un point d'inflexion en lequel la tangente n'est autre que l'axe Oy. La courbe admet au

point M ($t = 5/4$) une tangente qui est parallèle à l'axe Oy (fig. 61).

233. Asymptotes: $x = 0$, $x + y \pm 2 = 0$; O (0, 0) est un point d'inflexion en lequel la tangente est $x - y = 0$ (fig. 62).

234. L'origine des coordonnées est un point de rebroussement de deuxième espèce. La courbe coupe les axes de coordonnées aux points O (0, 0) et M (1, 0) (fig. 63).

235. La courbe est symétrique par rapport à la droite $y = x$. Asymptote: $x + y - 1 = 0$. L'origine des coordonnées est un point de rebroussement de première espèce ($t = 0$) en lequel l'axe Ox

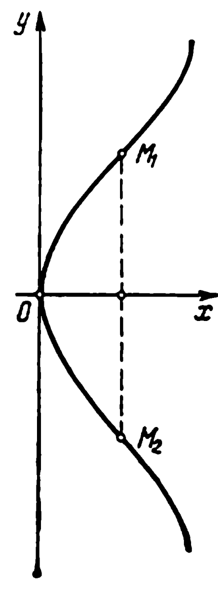


Fig. 59

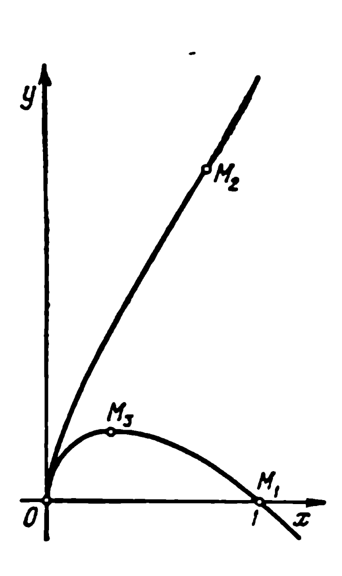


Fig. 60

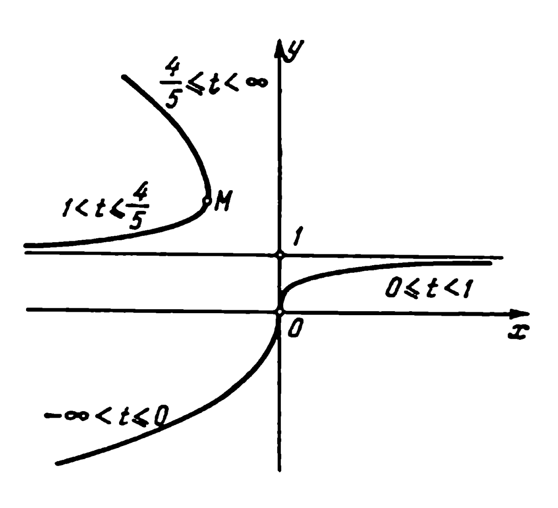


Fig. 61

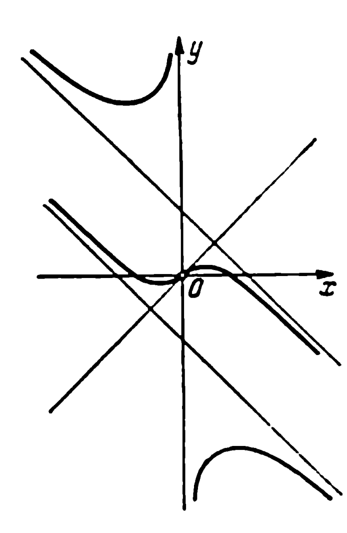


Fig. 62

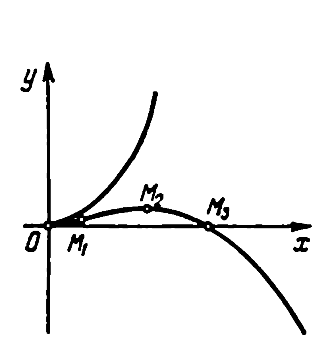


Fig. 63

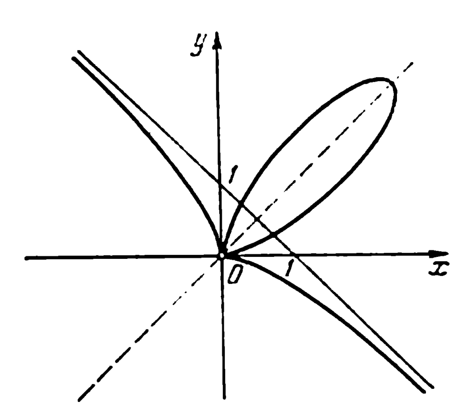


Fig. 64

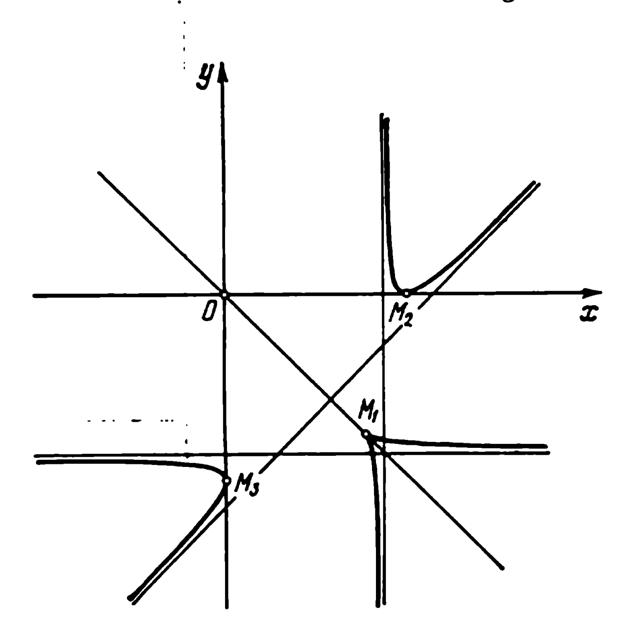


Fig. 65

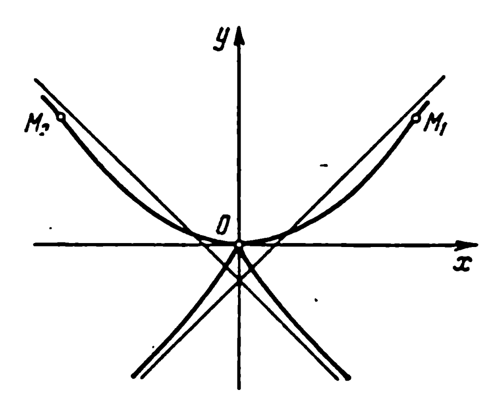


Fig. 66

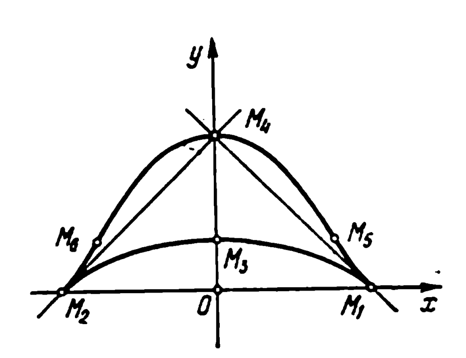


Fig. 67

est tangent à la courbe. De plus, la courbe est tangente en l'origine des coordonnées à l'axe Oy pour $t = \pm\infty$ (fig. 64).

236. Asymptotes: $2x + 9 = 0$, $2x - 9 = 0$, $x - y - 6 = 0$; M_1 (4, —4) est un point de rebroussement de première espèce en lequel $x + y = 0$ est tangent à la courbe. L'axe Ox est tangent à la courbe au point M_2 (16/3, 0), l'axe Oy, au point M_3 (0, —16/3) (fig. 65).

237. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy. Asymptotes: $y = \pm x - 1$; O (0, 0) est un point singulier triple en lequel les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont tangents à la courbe. Points d'inflexion $M_{1,2}$ $(\pm 2\sqrt[4]{27}, 2\sqrt{3})$ (fig. 66).

238. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy; $M_{1,2}$ (± 2, 0) sont des points de rebroussement de première espèce en lesquels $\pm x + y - 2 = 0$ sont tangentes à la courbe. Aux points M_3 (0, 2/3) et M_4 (0, 2) les tangentes sont parallèles à l'axe Ox; les points $M_{5,6}\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{2}{3}\right)$ sont des points d'inflexion (fig. 67).

239. Ox est axe de symétrie. Pas d'asymptotes et de points singuliers. La ligne coupe l'axe Ox au point M_1 (—1, 0) et l'axe Oy aux points $M_{2,3}$ (0, ± 1). Aux points $M_{2,3}$ les tangentes à la ligne sont parallèles à l'axe Ox, au point M_1, à l'axe Oy. Les points $M_{2,3}$ sont des points d'inflexion (fig. 68).

240. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox. Asymptotes: $x = 1$, $y = \pm 2$. La ligne est tangente à l'axe Oy en l'origine des coordonnées. Dans la bande $0 < x \leqslant 1$ il n'existe pas de points vérifiant l'équation donnée (fig. 69).

241. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox. Asymptote: $x = 1$. Tangente verticale: $x = 0$. La ligne n'existe que pour les valeurs de $x \in [0, 1[$, ceci résulte de l'écriture de l'équation de la ligne sous la forme $y^2 = \frac{x(x^2+1)}{1-x}$ (fig. 70).

242. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox. Asymptote: $x = 0$. Les tangentes aux points M_1 (—5/2, 0) et M_2 (1/2, 0) sont parallèles à l'axe des ordonnées. Deux points d'inflexion (fig. 71).

243. La ligne est entièrement comprise dans un carré centré en l'origine des coordonnées, de côtés égaux à $2a$ et parallèles aux axes de coordonnées. La ligne est symétrique par rapport aux axes de coordonnées et aux bissectrices des angles de coordonnées (fig. 72).

244. La ligne ressemble à une hyperbole. Asymptotes: $2y = \pm x$. Pour $x^2 < 6$ il n'existe pas de points vérifiant l'équation donnée hormis le point O (0, 0) qui est un point isolé (fig. 73).

245. Asymptotes: $y = \pm x$. Les tangentes en O (0, 0) et M_1 ($\sqrt[3]{2}$, 0) sont parallèles à l'axe Oy. Les points M_2 et M_3 sont des points d'inflexion (fig. 74).

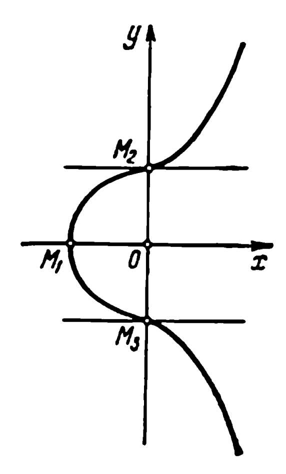


Fig. 68

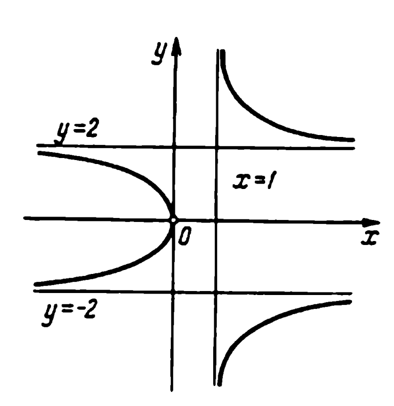


Fig. 69

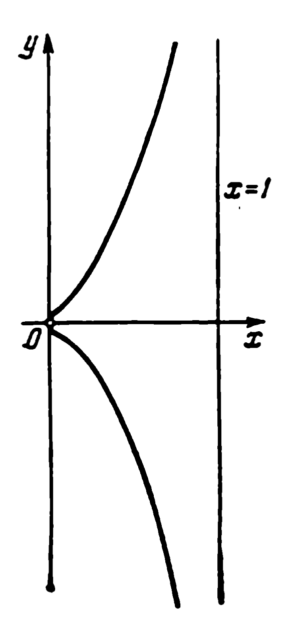


Fig. 70

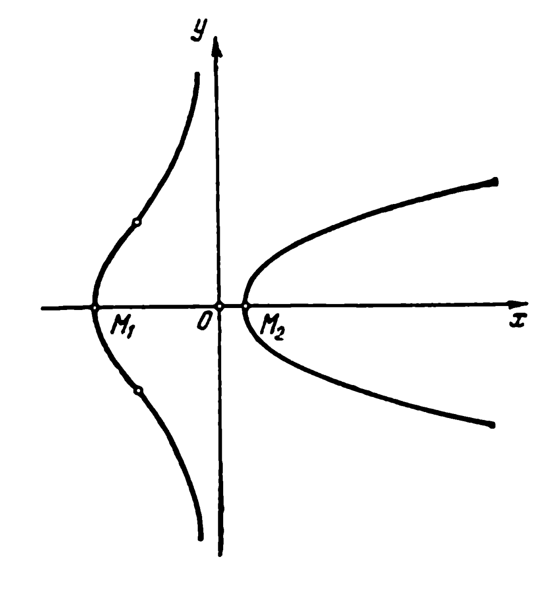


Fig. 71

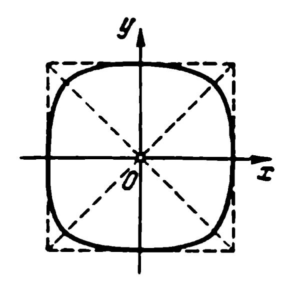


Fig. 72

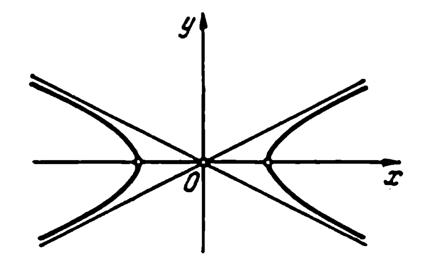


Fig. 73

246. Asymptotes: $y = \pm x$. Les tangentes aux points $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$ et $M_2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$ sont parallèles aux axes de coordonnées (fig. 75).

247. Asymptotes: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$; O (0, 0) est un point d'inflexion en lequel $y = -x$ est tangente à la courbe. Les tangentes aux points $M_{1,2}$ $(\sigma, (\sqrt{2} + 1)\sigma)$, $M_{3,4}$ $(-\sigma, (\sqrt{2} - 1)\sigma)$; $\sigma = \pm 1$ sont parallèles à l'axe Ox (fig. 76).

248. Asymptotes: $x = 0$, $y = 0$. La tangente en M (0, 1) est parallèle à l'axe Ox (fig. 77).

249. La droite $x = 1$ et le point isolé O (0, 0).

250. Asymptotes: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$; O (0, 0) est un point isolé (fig. 78).

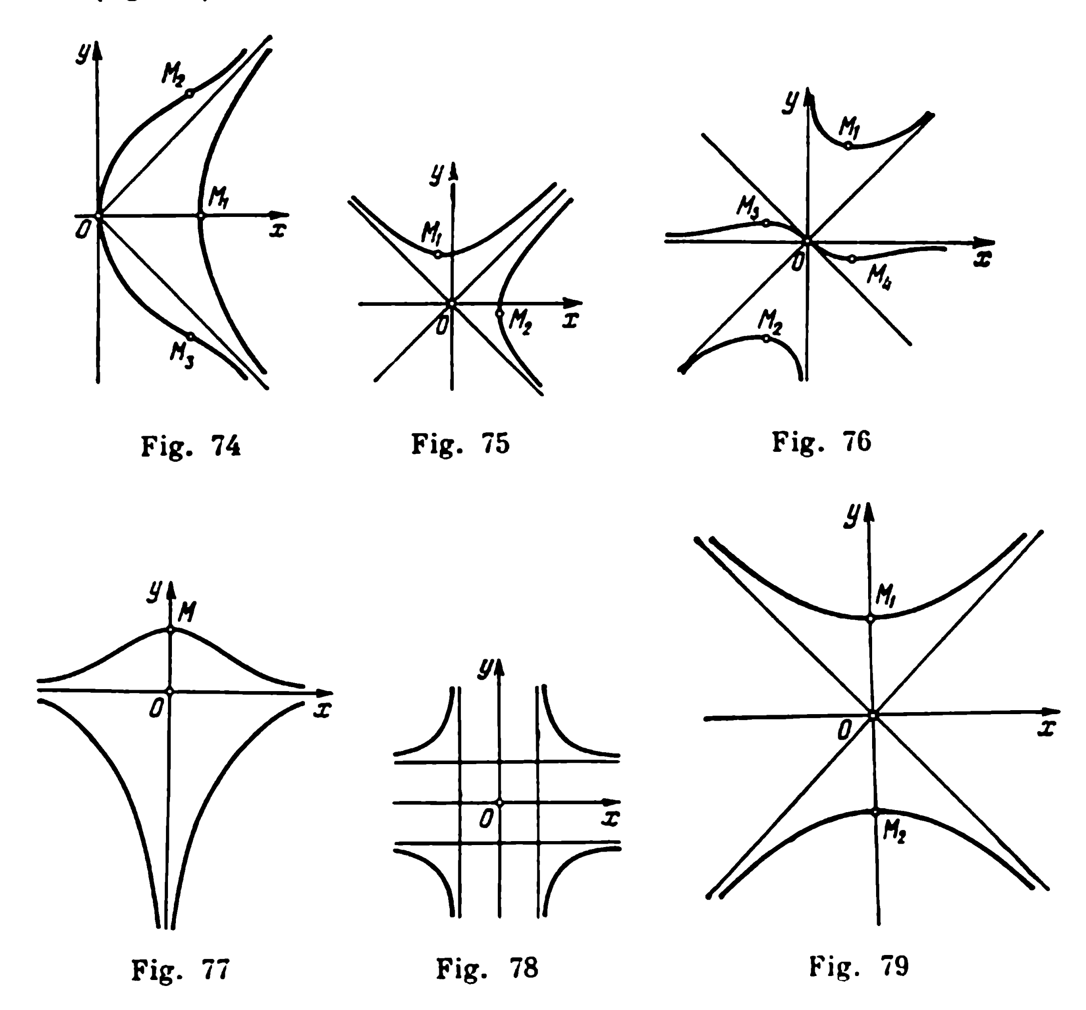


Fig. 74 Fig. 75 Fig. 76

Fig. 77 Fig. 78 Fig. 79

251. Asymptotes: $y = \pm x$; O (0, 0) est un point isolé. La ligne coupe l'axe Oy aux points $M_{1,2}$ $(0, \pm\sqrt{2})$ en lesquels les tangentes sont parallèles à l'axe Ox (fig. 79).

252. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox. Asymptotes : $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $x = 1$; les asymptotes $y = \pm(x + 1)$ coupent la ligne en M_1 $(-1, 0)$; O $(0, 0)$ est un point isolé. Dans la

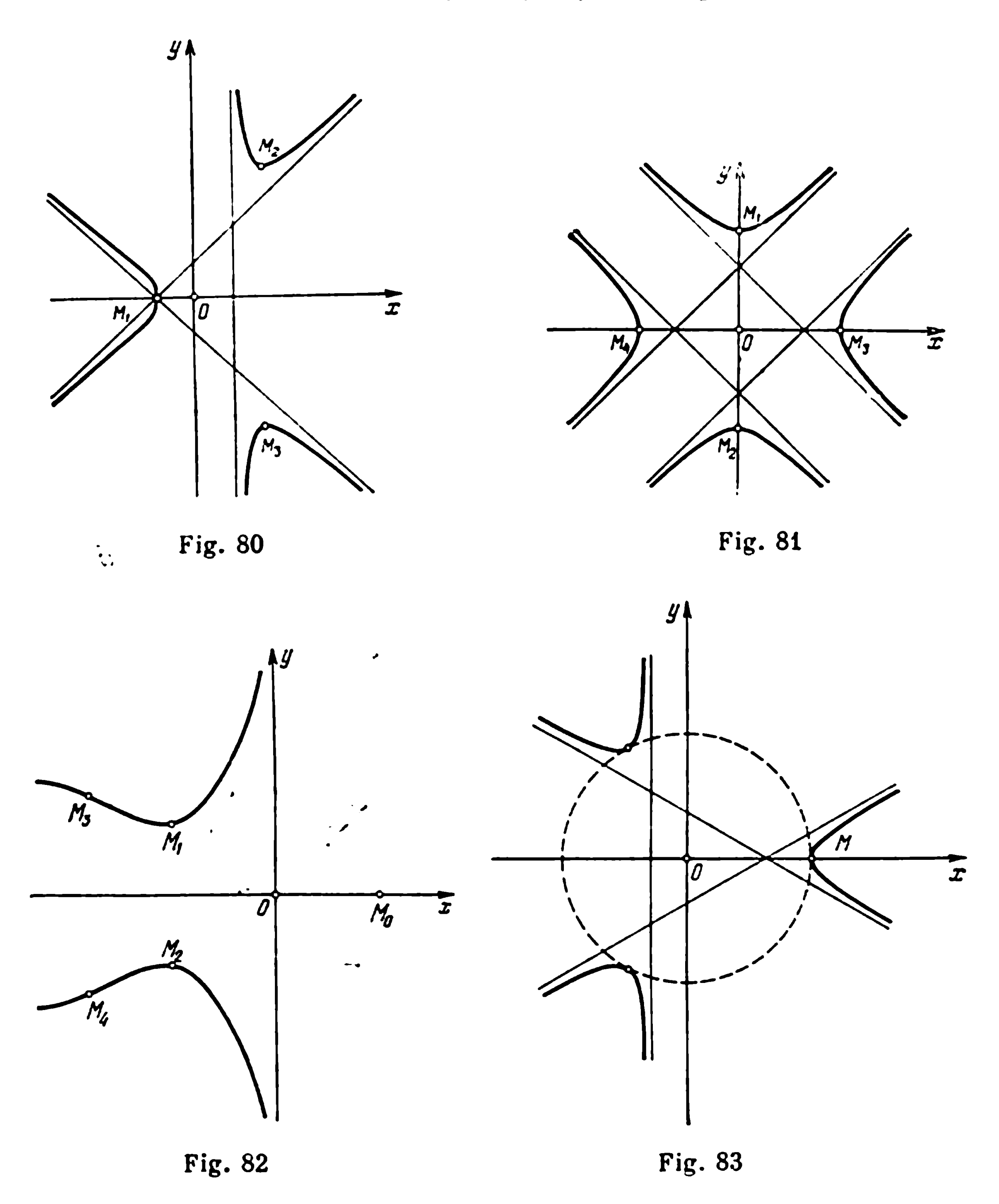


Fig. 80

Fig. 81

Fig. 82

Fig. 83

bande $-1 < x \leqslant 1$ il n'existe pas de points autres que O. Au point M_1 la tangente à la ligne est parallèle à l'axe Oy, aux points M_2 et M_3 d'abscisse $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, à l'axe Ox (fig. 80).

253. Asymptotes: $y - x \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$, $y + x \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$. L'origine des coordonnées est un point isolé. Les tangentes aux points $M_{1,2}$ $(0, \pm a)$ sont parallèles à l'axe Ox. Les tangentes aux points $M_{3,4}$ $(\pm a, 0)$ sont parallèles à l'axe Oy (fig. 81).

254. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox. Le point M_0 $(2, 0)$ est isolé. Aux points $M_{1,2}$ $(-2, \pm \sqrt{2})$ la tangente est parallèle à l'axe Ox. $M_{3,4}$ sont des points d'inflexion, $x = 0$ est asymptote (fig. 82).

255. Asymptotes: $3x + 4 = 0$, $3x \pm 3\sqrt{3}\,y - 8 = 0$; O $(0, 0)$ est un point isolé. La ligne coupe l'axe Ox au point M $(4, 0)$. La tangente en ce point est $x = 4$ (fig. 83).

256. La ligne est entièrement contenue à l'intérieur d'un carré de centre O, de côtés parallèles aux axes de coordonnées et égaux à $\sqrt{2 + \sqrt{8}}$. La ligne est symétrique par rapport aux axes de coordonnées et aux bissectrices des angles de coordonnées. L'origine des coordonnées est un point isolé. Les tangentes aux points $M_{1,2}$ $(0, \pm 1)$, $M_{3-6}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}\right)$ sont parallèles à l'axe Ox. Les tangentes aux points $M_{7,8}$ $(\pm 1, 0)$, $M_{9-12}\left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont parallèles à l'axe Oy (fig. 84).

257. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox et est entièrement contenue dans la bande $-1 \leqslant x < 1$. Asymptote: $x = 1$. L'origine des coordonnées est un point de self-intersection en lequel les coefficients angulaires des tangentes sont $k = \pm 1$. La tangente en M_1 $(-1, 0)$ est parallèle à l'axe Oy. Les tangentes aux points $M_{2,3}$ d'abscisse $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ sont parallèles à l'axe Ox (fig. 85).

258. La ligne est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Elle coupe les axes de coordonnées aux points O $(0, 0)$ et $M_{1,2}$ $(0, \pm 1)$. Les tangentes en $M_{1,2}$ sont parallèles à Ox. Les tangentes en $M_{3-6}\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sont parallèles à Oy. L'origine des coordonnées est un point de self-intersection en lequel les droites $y = \pm x$ sont tangentes à la ligne (fig. 86).

259. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox; M $(1, 0)$ est un point de self-intersection en lequel les droites $y = \pm(x - 1)$ sont tangentes à la ligne. Asymptote: $x = 0$ (fig. 87).

260. La ligne est symétrique par rapport aux bissectrices des angles de coordonnées. $O\,(0, 0)$ est un point de self-intersection en lequel $x = 0$ et $y = 0$ sont tangentes à la ligne. Il n'existe pas d'autres points d'intersection avec les axes de coordonnées. Aux points $M_1\left(\sqrt[8]{3/16}, \sqrt[8]{27/16}\right)$, $M_2\left(-\sqrt[8]{3/16}, -\sqrt[8]{27/16}\right)$ les tan-

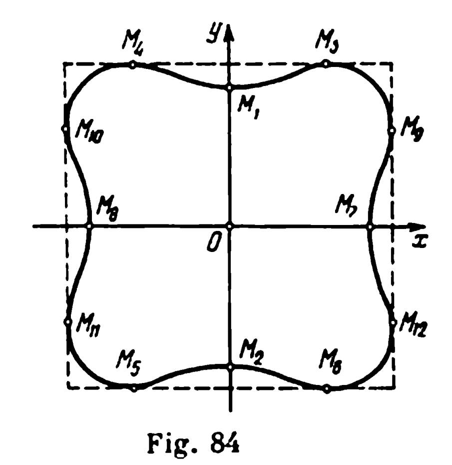


Fig. 84

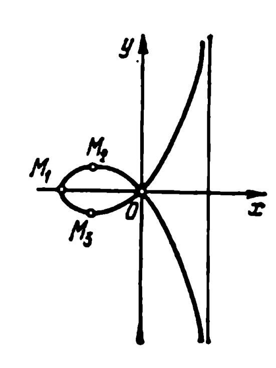


Fig. 85

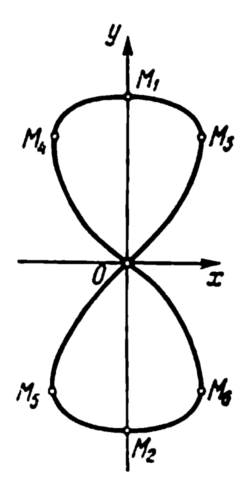


Fig. 86

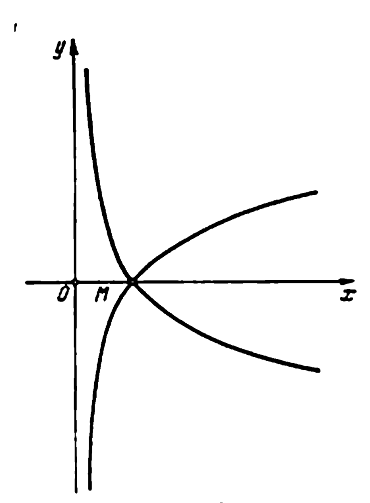


Fig. 87

gentes sont parallèles à l'axe Ox, aux points $M_3(\sqrt[8]{27/16},\ \sqrt[8]{3/16})$, $M_4(-\sqrt[8]{27/16},\ -\sqrt[8]{3/16})$ à l'axe Oy. Pas d'asymptotes (fig. 88).

261. La ligne est symétrique par rapport aux axes de coordonnées et est située à l'intérieur du rectangle limité par les droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1/2$; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel les tangentes sont $y = \pm x$. Aux points $M_{3\text{-}6}$ $(\pm\sqrt{2}/2,\ \pm 1/2)$ les tangentes sont parallèles à l'axe Ox, aux points $M_{1,2}$ $(\pm 1,\ 0)$ à l'axe Oy (fig. 89).

262. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox. Asymptotes: $y = \pm 1$, $x = -1$, $x = -2$; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel $y\sqrt{2} = \pm x$ est tangente à la courbe (fig. 90).

263. Les tangentes en $M_{2,3}$ $(1/3,\ \pm 2/3\sqrt{3})$ sont parallèles à l'axe Ox; le point M_1 (1, 0) est un point de self-intersection en lequel $y = \pm(x - 1)$ sont tangentes à la ligne. L'axe Oy est tangent à la ligne en O (0, 0) (fig. 91).

264. La ligne est symétrique par rapport aux bissectrices des angles de coordonnées; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel les axes de coordonnées sont tangents à la ligne. Aux points

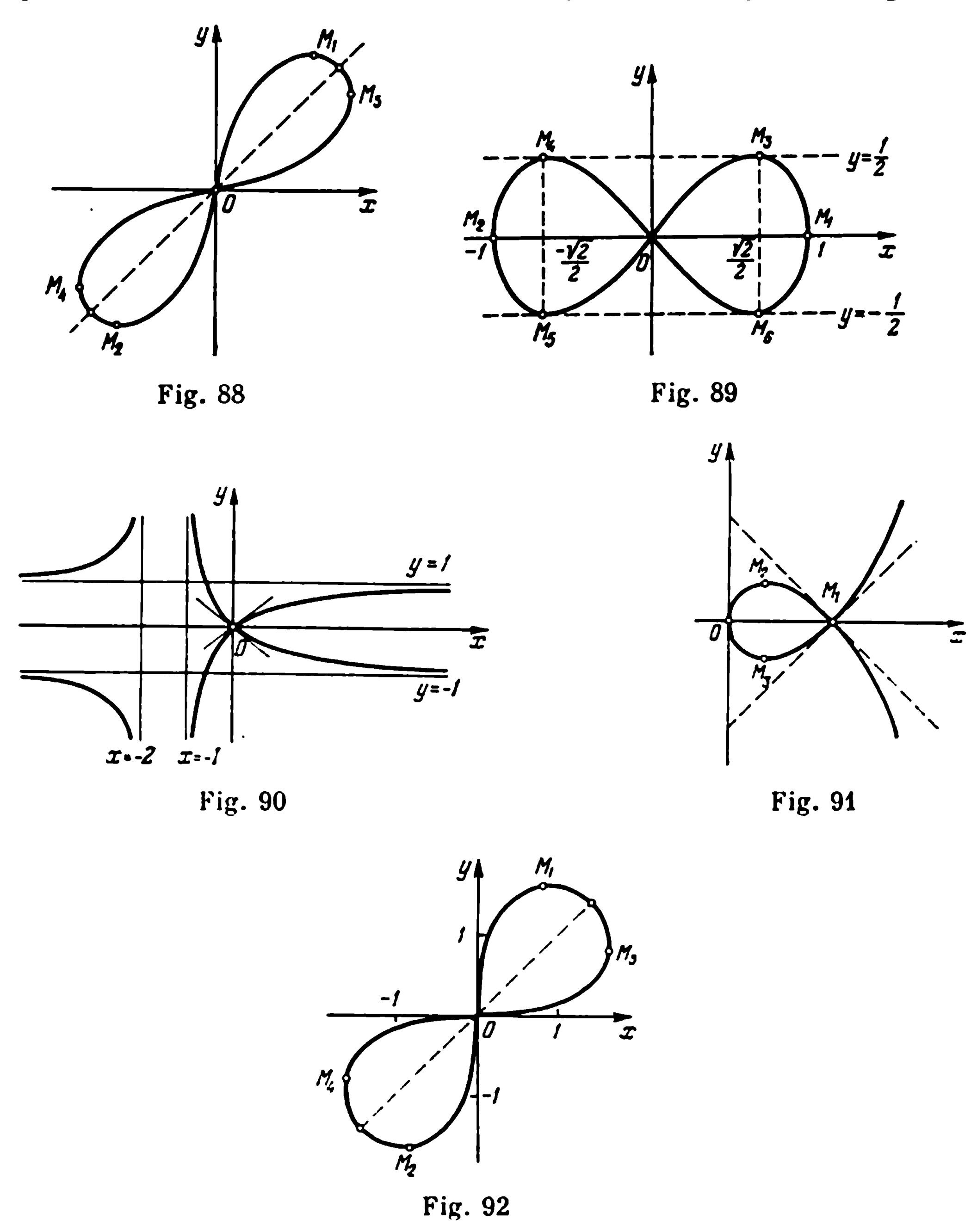


Fig. 88

Fig. 89

Fig. 90

Fig. 91

Fig. 92

$M_{1,2}$ $(\sigma\sqrt[4]{3},\ \sigma\sqrt[4]{27})$ les tangentes sont parallèles à l'axe Ox, aux points $M_{3,4}$ $(\sigma\sqrt[4]{27},\ \sigma\sqrt[4]{3})$, où $4\sigma = \pm 1$, à l'axe Oy (fig. 92).

265. L'asymptote $y = -x + \frac{1}{3}$ coupe la ligne au point M_1 (1/9, 2/9) ; O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce en

lequel $x = 0$ est tangente à la ligne. En M_2 (1, 0) la tangente est parallèle à l'axe Oy, en M_3 $(2/3, \sqrt[3]{4}/3)$, à l'axe Ox (fig. 93).

266. Pas d'asymptotes. O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce en lequel $y = x$ est tangente à la ligne. La ligne

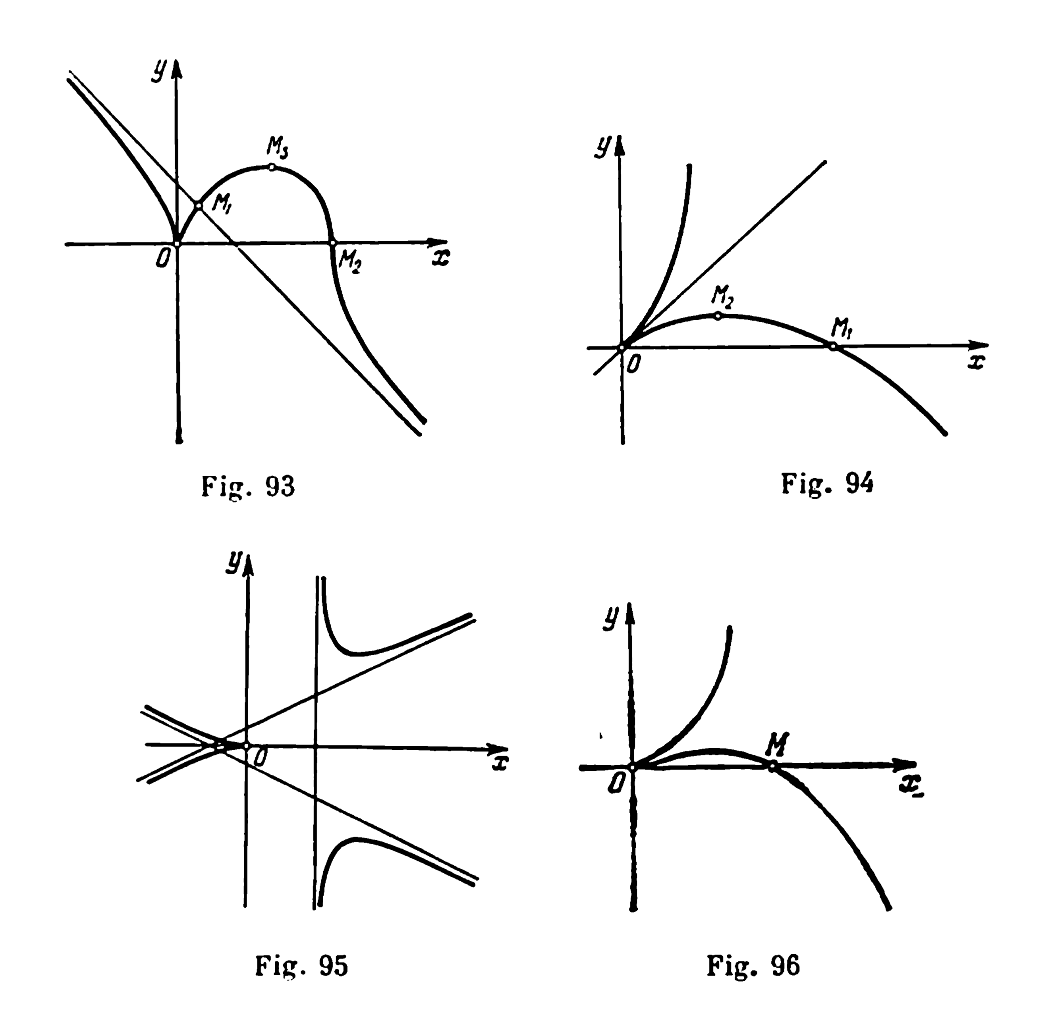


Fig. 93 Fig. 94

Fig. 95 Fig. 96

coupe l'axe Ox en M_1 (27, 0). La tangente en M_2 (12, 4) est parallèle à l'axe Ox (fig. 94).

267. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox; O (0, 0) est un point de rebroussement de première espèce en lequel $y = 0$ est tangent à la ligne. Asymptotes: $x = a$, $x \pm y = -a/2$. Dans la bande $0 < x \leqslant a$ il n'existe pas de points vérifiant l'équation de la ligne (fig. 95).

268. O (0, 0) est un point de rebroussement de deuxième espèce en lequel $y = 0$ est tangent à la ligne; $M_1\left(\frac{64}{225}, \frac{28672}{759375}\right)$ est un point d'inflexion. La tangente en $M_2\left(\frac{16}{25}, \frac{256}{3125}\right)$ est parallèle à l'axe Ox. La ligne coupe l'axe Ox en M_3 (1, 0) (fig. 96).

269. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Oy; O (0, 0) est un point singulier par lequel passent trois arcs. Les droites $y = 0$, $x \pm y = 0$ sont tangentes à la ligne en O. Pas de points d'inflexion ni d'asymptotes. Les tangentes en $M_{1,2}$ $(\pm\sqrt{2}/4,\ 1/4)$, $M_{3,4}$ $(\pm\sqrt{6}/9,\ 2/9)$ sont parallèles aux axes de coordonnées (fig. 97).

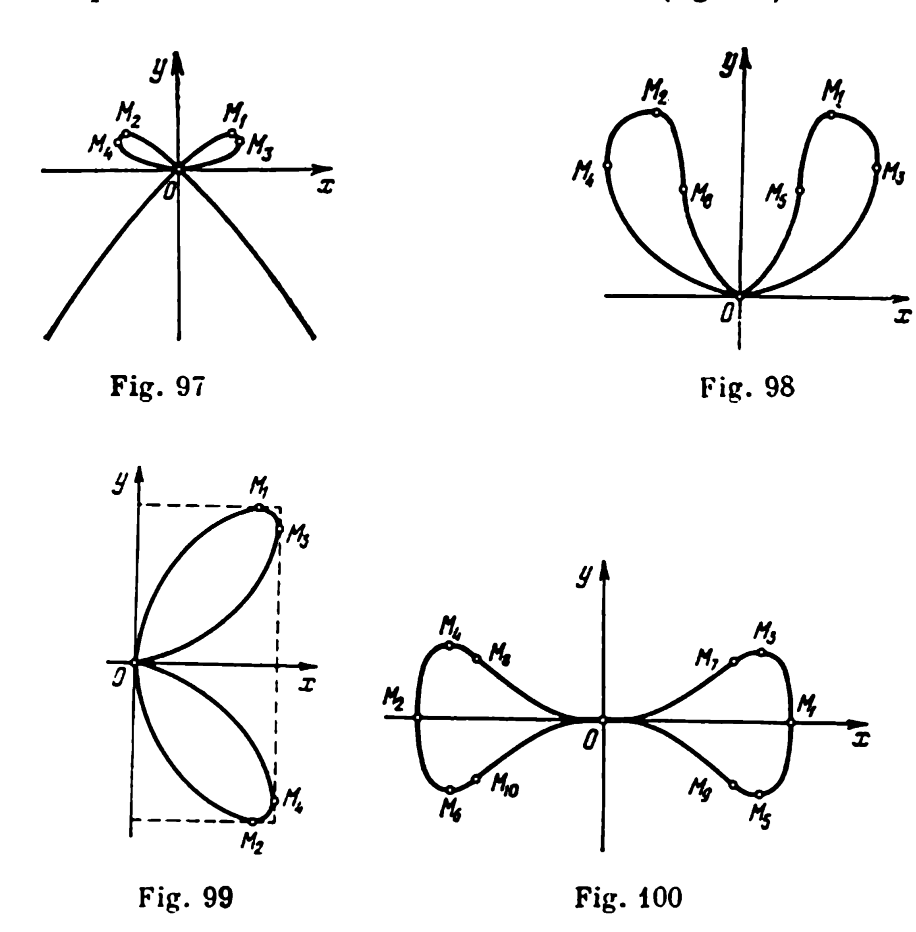


Fig. 97 Fig. 98

Fig. 99 Fig. 100

270. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Oy; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel l'axe $y = 0$ est tangent à la ligne. Les tangentes en $M_{1,2}$ $(\pm 6,\ 12)$ sont parallèles à l'axe Ox, les tangentes en $M_{3,4}$ $(\pm 6\sqrt{2},\ 8)$, à l'axe Oy. Il existe deux points d'inflexion $M_{5,6}$ (fig. 98).

271. La ligne est symétrique par rapport à l'axe Ox; O (0, 0) est un point singulier triple en lequel les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont tangents à la ligne. Les tangentes en $M_{1,2}$ $(\sqrt{12},\ \sqrt{6\sqrt{12}})$ sont parallèles à l'axe Ox, les tangentes en $M_{3,4}$ $(4,\ \pm 4)$, à l'axe Oy (fig. 99).

272. La ligne est symétrique par rapport aux axes de coordonnées; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel l'axe $y = 0$ est tangent à la ligne. La ligne coupe l'axe Ox en $M_{1,2}$ $(\pm 1,\ 0)$. En ces points les tangentes sont parallèles à l'axe Oy. Les tangentes en

$M_{3,4,5,6}$ $(\pm\sqrt{6}/3,\ \pm 2\sqrt{3}/9)$ sont parallèles à l'axe Ox; $M_{7,8,9,10}$ sont des points d'inflexion (fig. 100).

273. Asymptotes: $y = \pm x$; O (0, 0) est un point de self-intersection en lequel les axes de coordonnées sont parallèles à la ligne. Il existe 5 points d'inflexion (fig. 101).

274. La ligne est entièrement contenue dans un carré de centre O (0, 0) dont les côtés sont égaux à 4 et sont parallèles aux axes de

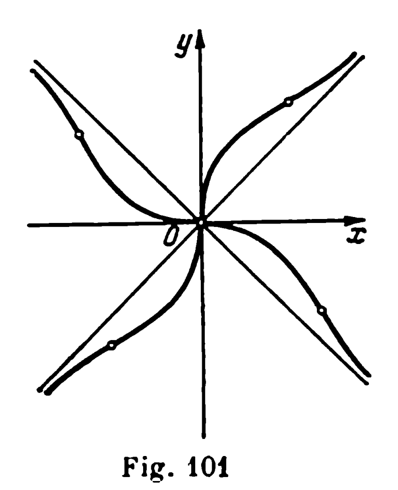


Fig. 101

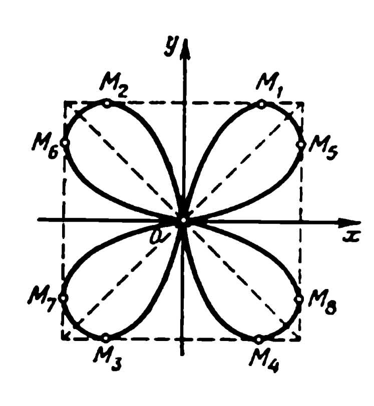


Fig. 102

coordonnées. La ligne est symétrique par rapport aux axes de coordonnées et aux bissectrices des angles de coordonnées. L'origine des coordonnées est un point singulier quadruple en lequel les axes de coordonnées sont tangents à la ligne. Les tangentes en $M_{1,2,3,4}$ $(\pm\sqrt{2},\ \pm 2)$ sont parallèles à l'axe Ox, les tangentes en $M_{5,6,7,8}$ $(\pm 2,\ \pm\sqrt{2})$, à l'axe Oy (fig. 102).

275. La fonction tg $(\varphi/2)$ étant périodique de période 2π, il suffit de considérer les valeurs de $\varphi \in [0, 2\pi]$. Le point $(2\pi - \varphi, -r)$ étant confondu avec le point $(\pi - \varphi, r)$ et les points (φ, r) et $(\pi - \varphi, r)$ étant symétriques par rapport à la droite $\varphi = \pi/2$, cette dernière est axe de symétrie de la courbe. Pour $\varphi \in [0, \pi]$ la fonction $r = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ est positive, donc la courbe est située au-dessus de l'axe polaire. Le point $(\pi/2, 1)$ est un point de self-intersection. La courbe admet une asymptote parallèle à l'axe polaire et distante de cet axe de deux unités. De la relation $\operatorname{tg}\mu = r/r'$ (cf. exercice 150) on déduit que

$$\operatorname{tg}\mu = \sin\varphi. \qquad (*)$$

Donc, la courbe est tangente au rayon vecteur du point de contact seulement pour $\varphi = 0$. Les tangentes au point de self-intersection M_0 coupent l'axe de symétrie sous un angle de 45°. La tangente à la courbe étant parallèle à l'axe polaire, si $\mu + \varphi = k\pi$, alors en ces points $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{tg}\varphi$. En combinant avec (*), on obtient $\varphi = k\pi$; donc,

la tangente cherchée est l'axe polaire. La tangente étant perpendiculaire à l'axe polaire, si $\mu + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, alors tg μ = cotg φ, et en vertu de (*) cotg $\varphi = \sin \varphi$, d'où $\cos \varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$, tg $(\varphi/2) \approx 1/2$. En passant aux coordonnées cartésiennes $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, on obtient deux points M_1 et M_2 en lesquels les tangentes à la courbe sont perpendiculaires à l'axe polaire: $x_1 \approx 0,3$, $y_1 \approx 0,4$; $x_2 \approx -0,3$, $y_2 \approx 0,4$ (fig. 103).

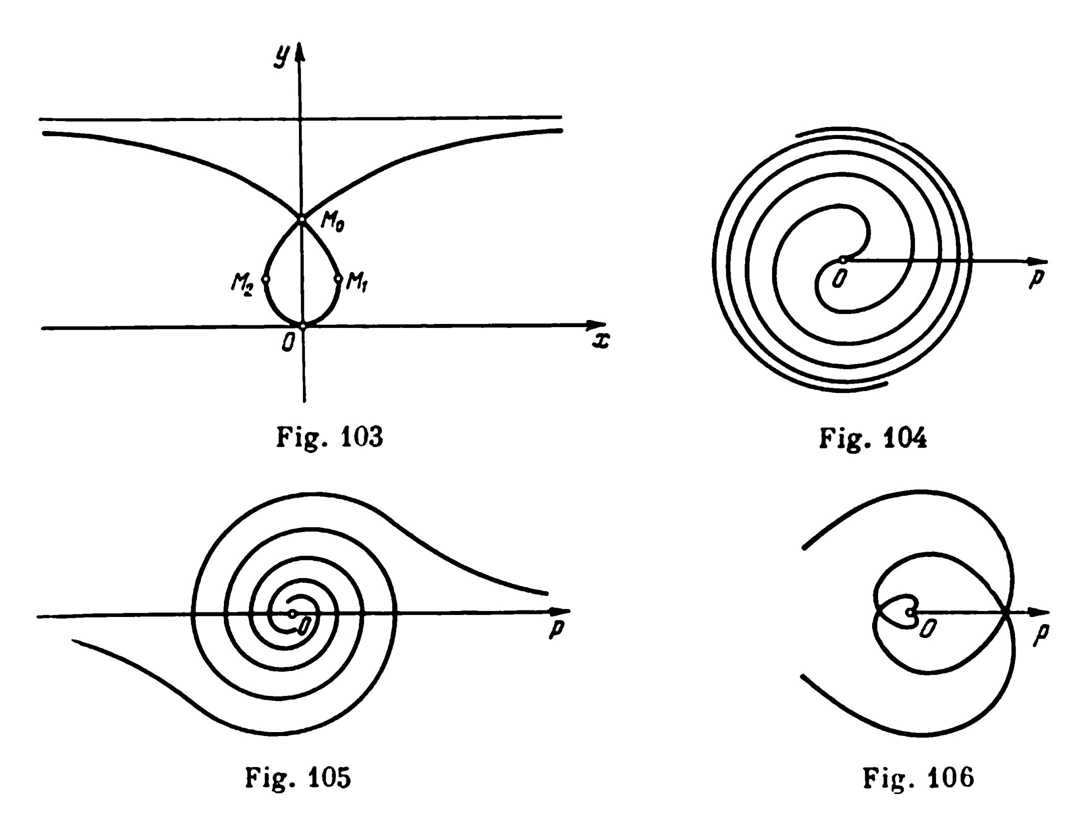


Fig. 103 Fig. 104

Fig. 105 Fig. 106

276. Fig. 104. La spirale présente un point d'inflexion au pôle. La distance entre les spires décroît indéfiniment à mesure que l'on s'éloigne du pôle.

277. Si r et φ sont des coordonnées polaires généralisées (c'est-à-dire que r peut prendre une valeur de signe quelconque), alors l'équation $r^2\varphi = a^2$ définit deux courbes symétriques par rapport au pôle. Chacune de ces courbes tend indéfiniment vers le pôle et asymptotiquement vers l'axe polaire (fig. 105).

278. Fig. 106. Le pôle est un point de rebroussement de première espèce. L'axe polaire est tangent à la courbe en ce point.

279. Supposons que $a > 0$. Pour $\varphi \to 0$, la ligne tend asymptotiquement vers une droite parallèle à l'axe polaire et distante de lui de l. Lorsque φ croît indéfiniment, la ligne fait une infinité de spires autour du pôle en tendant asymptotiquement vers le cercle

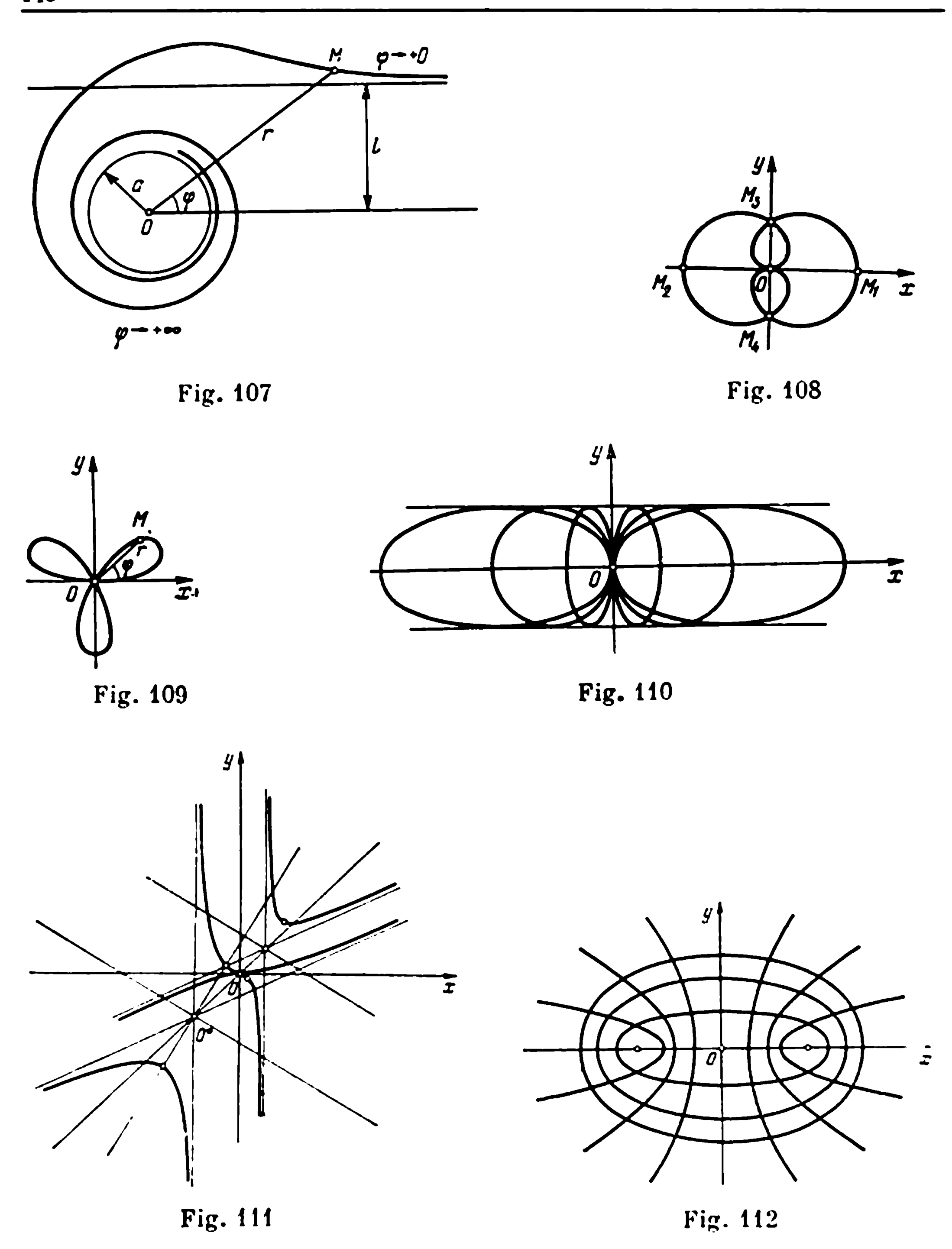


Fig. 107

Fig. 108

Fig. 109

Fig. 110

Fig. 111

Fig. 112

$r = a$ (fig. 107). Pour $a = 0$ on obtient une spirale hyperbolique (voir exercice **169**, fig. 41).

280. La courbe est symétrique par rapport aux axes d'un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe Ox est confondu avec l'axe polaire. La courbe coupe l'axe Ox aux points $M_{1,2}$ $(\pm a, 0)$, O $(0, 0)$. Le point O $(0, 0)$ est un point autotangentiel en lequel l'axe $y = 0$

est tangent à la courbe. La courbe présente deux points de self-intersection : M_3 $(0, a/\sqrt{2})$ et M_4 $(0, -a/\sqrt{2})$ (fig. 108).

281. Fig. 109.

282. La famille est composée d'ellipses tangentes en l'origine des coordonnées à l'axe Oy et des droites $y = 1/2$ et $y = -1/2$, ainsi que de l'axe Ox (fig. 110).

283. Pour $C = 0$, le couple de droites $x = 0$, $x - 2y = 0$. Pour $C \neq 0$, des hyperboles semblables dont les asymptotes sont

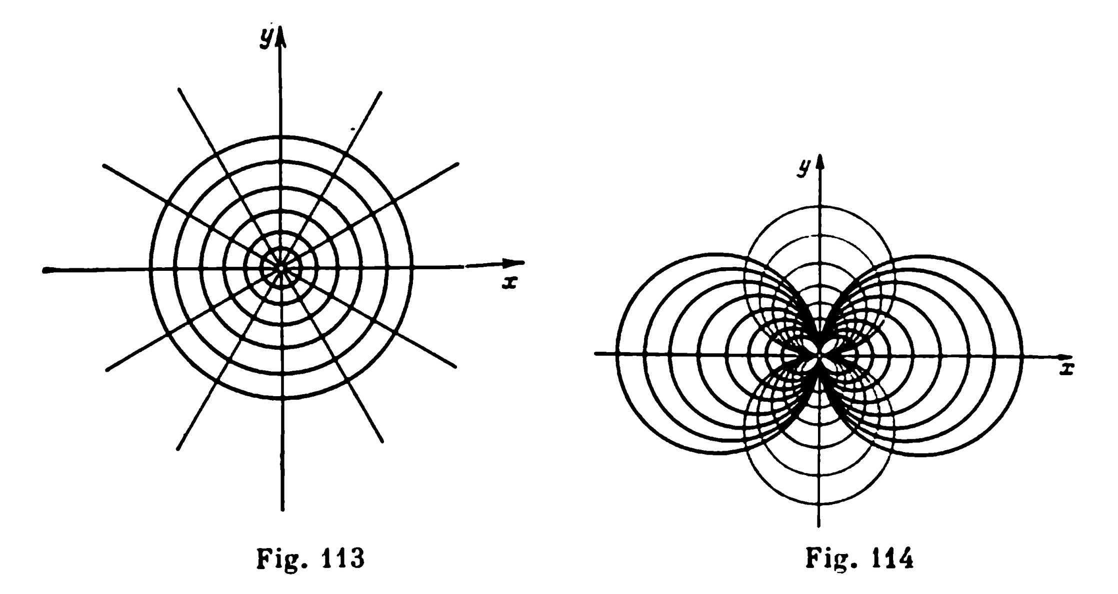


Fig. 113 Fig. 114

parallèles aux droites précédentes. Le lieu géométrique des centres O^* (C, C) des hyperboles est la droite $x - y = 0$. Une branche est tangente à Ox en l'origine des coordonnées (fig. 111).

284. a) Une famille d'ellipses cofocales ; b) une famille d'hyperboles cofocales (fig. 112).

287. Des cercles concentriques dont le centre est le centre du faisceau (fig. 113).

288. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ (fig. 114).

289. $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ (fig. 115).

290. Une famille de cercles sécants dont la ligne des centres est la corde commune de la famille donnée. Si l'on prend pour axe Ox la corde commune et pour origine son milieu, on obtient l'équation $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - a^2$ (fig. 116).

291. $y = \pm a$ (fig. 117). **292.** $x = 0$, $y = 0$ (fig. 118).

293. $x^2 + y^2 = p^2$ (fig. 119). **294.** $y = 0$ (fig. 120).

295. La courbe caractéristique $y = 0$ est composée des points singuliers des lignes de la famille (fig. 121).

296. La courbe caractéristique $y = 0$ est composée des points singuliers des lignes de la famille (fig. 122).

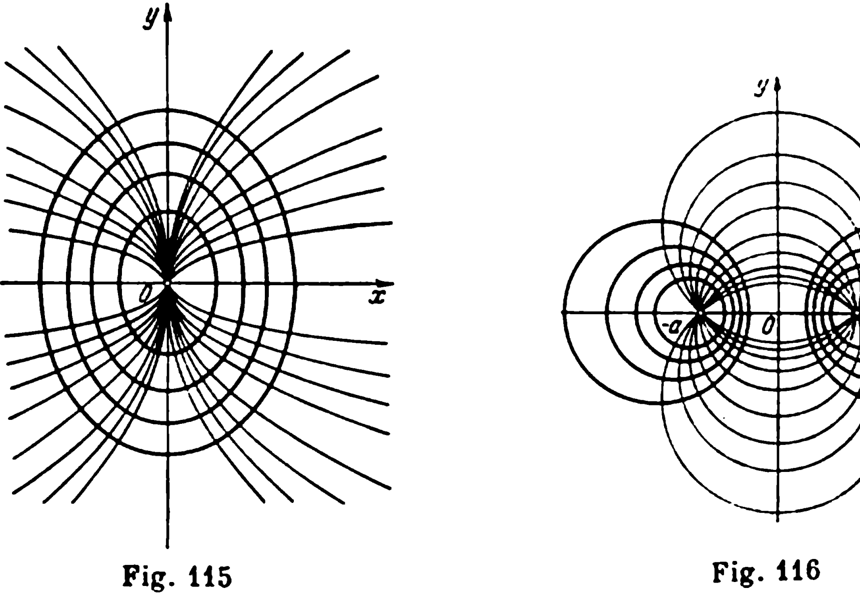


Fig. 115

Fig. 116

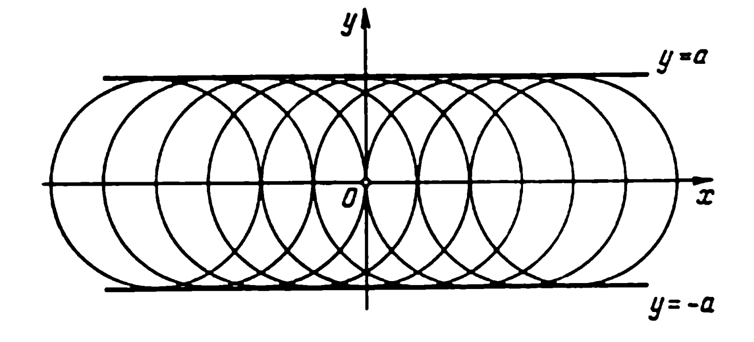


Fig. 117

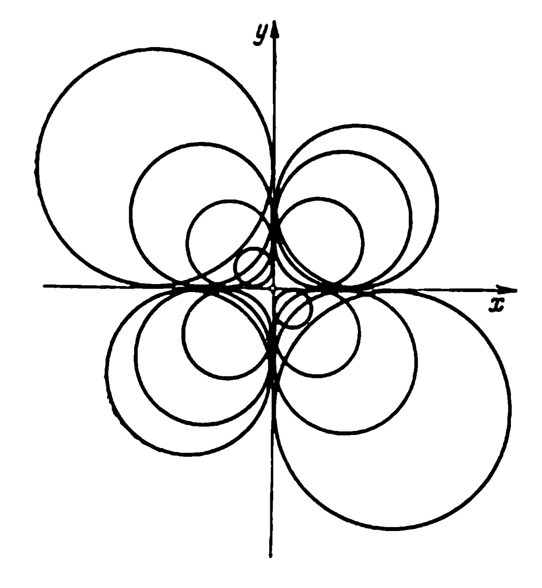
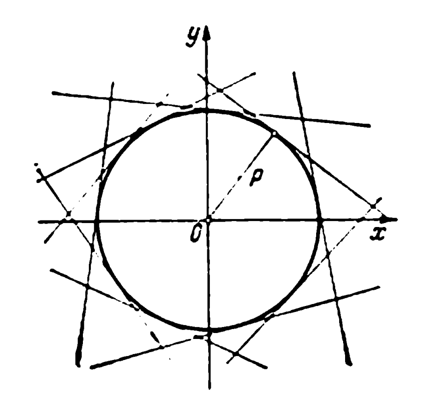
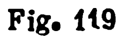


Fig. 118




Fig. 119

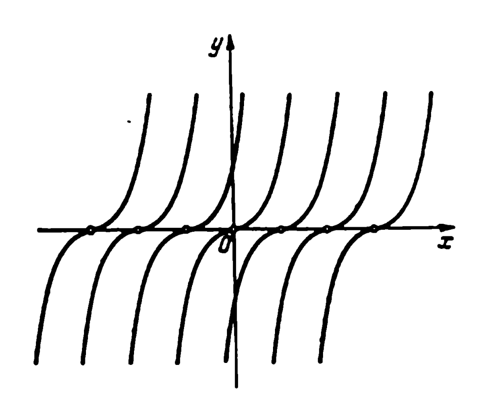


Fig. 120

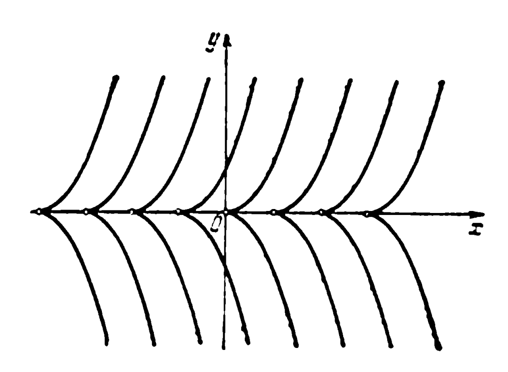


Fig. 121

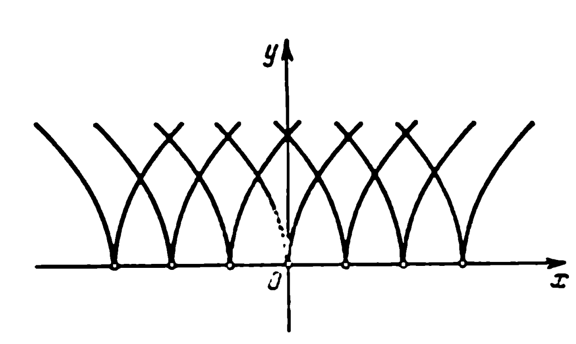


Fig. 122

297. La courbe caractéristique est composée des droites $x = y$ et $x - y - \frac{2}{9} = 0$. La première est constituée des points singuliers des courbes, la seconde est une enveloppe (fig. 123).

298. Le cercle $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ (fig. 124).

299. La parabole $y^2 + 4a(x - a) = 0$ (fig. 125).

300. Les hyperboles $xy = \pm S/2$ (fig. 126).

301. $(A^2 + B^2) R^2 = C^2$.

302. L'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 127).

303. a) La parabole $y^2 = 4ax$ (fig. 128).

I n d i c a t i o n. Prenons la droite fixe pour axe Oy et faisons passer l'axe Ox par le point F. Supposons que les coordonnées de F sont $(a, 0)$. En mettant l'équation du faisceau de droites passant par F sous la forme $y = C(x - a)$, on trouve que les droites de la famille passent par le point de coordonnées $(0, -Ca)$ et leur pente est égale à $-1/C$. b) Si $(a, 0)$ sont les coordonnées de F et si $x^2 + y^2 = r^2$ est l'équation du cercle, alors pour $r > a$ on obtient

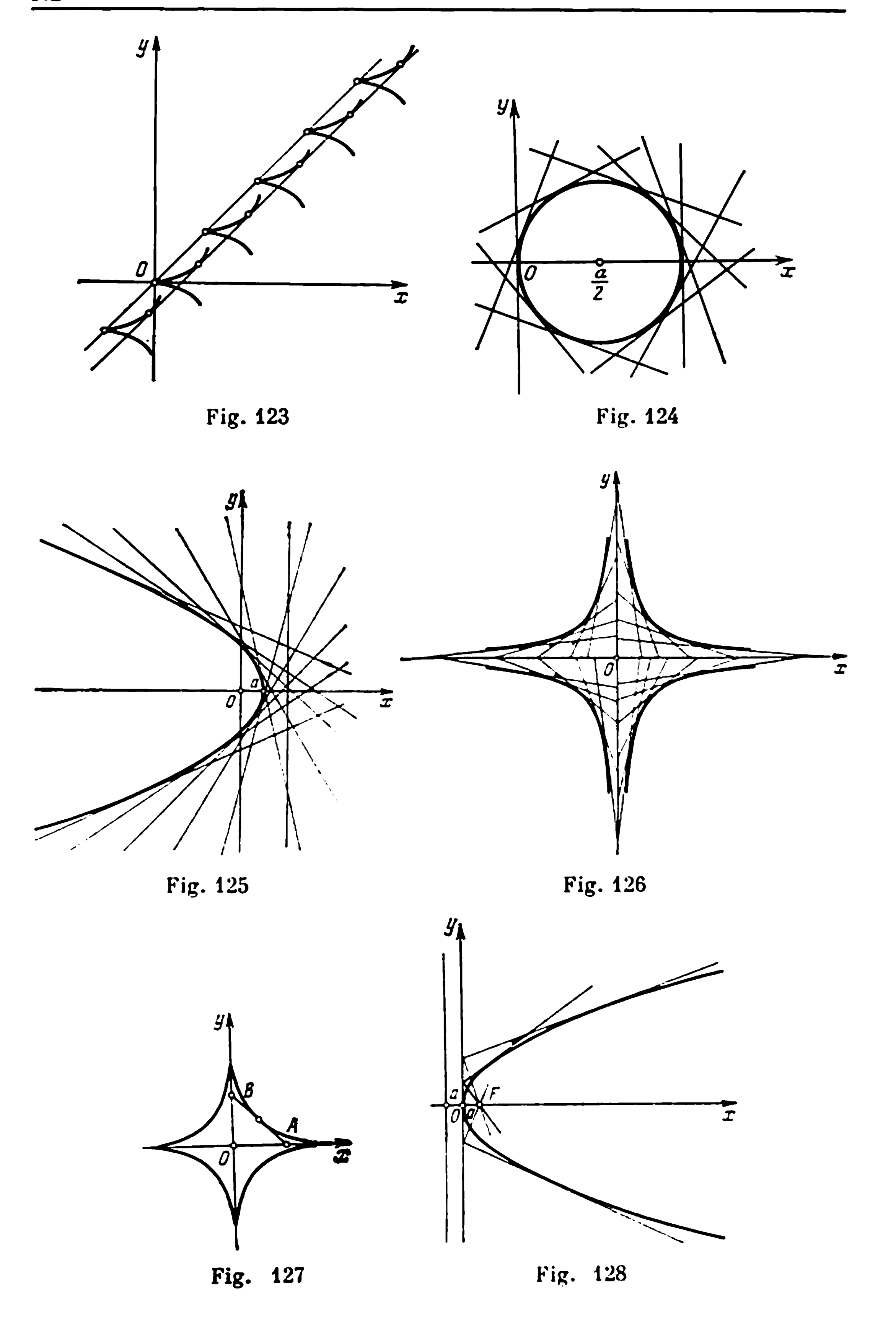


Fig. 123

Fig. 124

Fig. 125

Fig. 126

Fig. 127

Fig. 128

l'ellipse $\frac{x}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2} = 1$, pour $r < a$ l'hyperbole $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{a^2 - r^2} = 1$. Pour $r = a$ il n'existe pas d'enveloppes (fig. 129).

304. Une cycloïde (fig. 130).

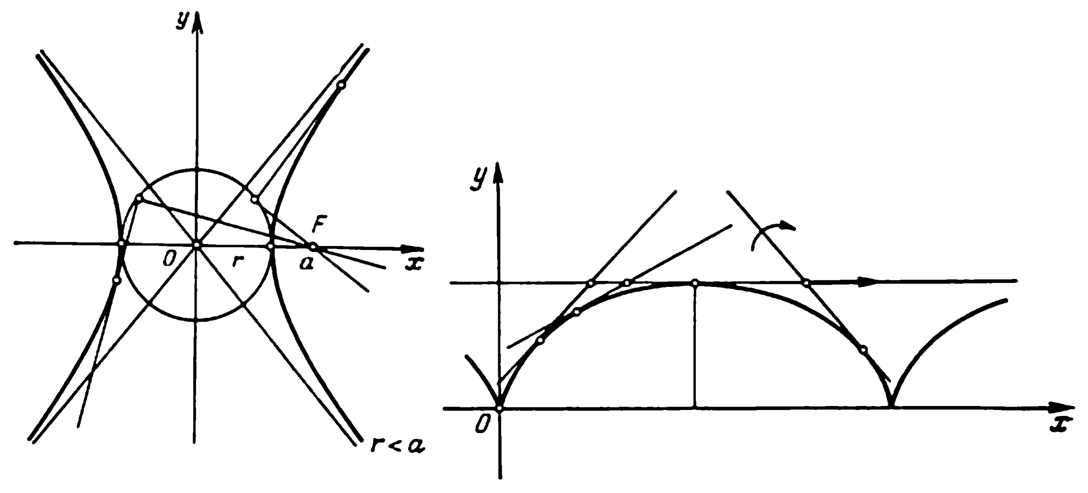


Fig. 129 Fig. 130

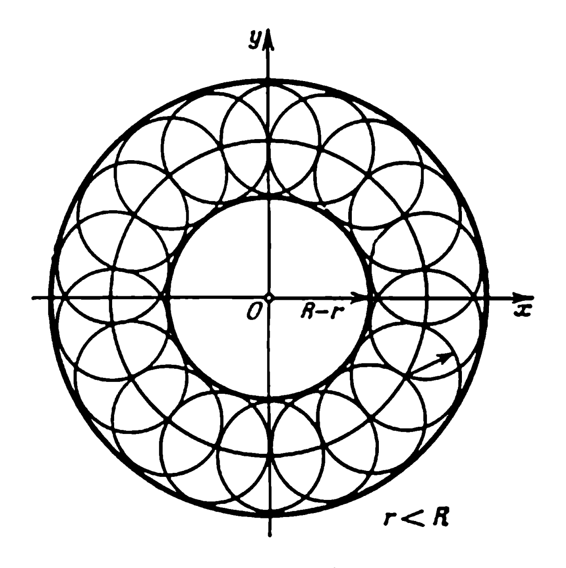


Fig. 131

305. $x^2 + y^2 = (R - r)^2$, $x^2 + y^2 = (R + r)^2$ (fig. 131, 132, 133).

306. La tangente au sommet de la parabole (fig. 134).

307. L'enveloppe est composée du cercle $\left(x - \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3p}{4}\right)^2$ et de la directrice de la parabole $x = -p/2$ (fig. 135).

308. Ecrivons l'équation de l'ellipse sous la forme paramétrique

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Etudions le cas où les cordes sont parallèles à l'axe Oy. Les coordonnées du centre d'un cercle de la famille sont: $x_0 = a\cos\varphi$,

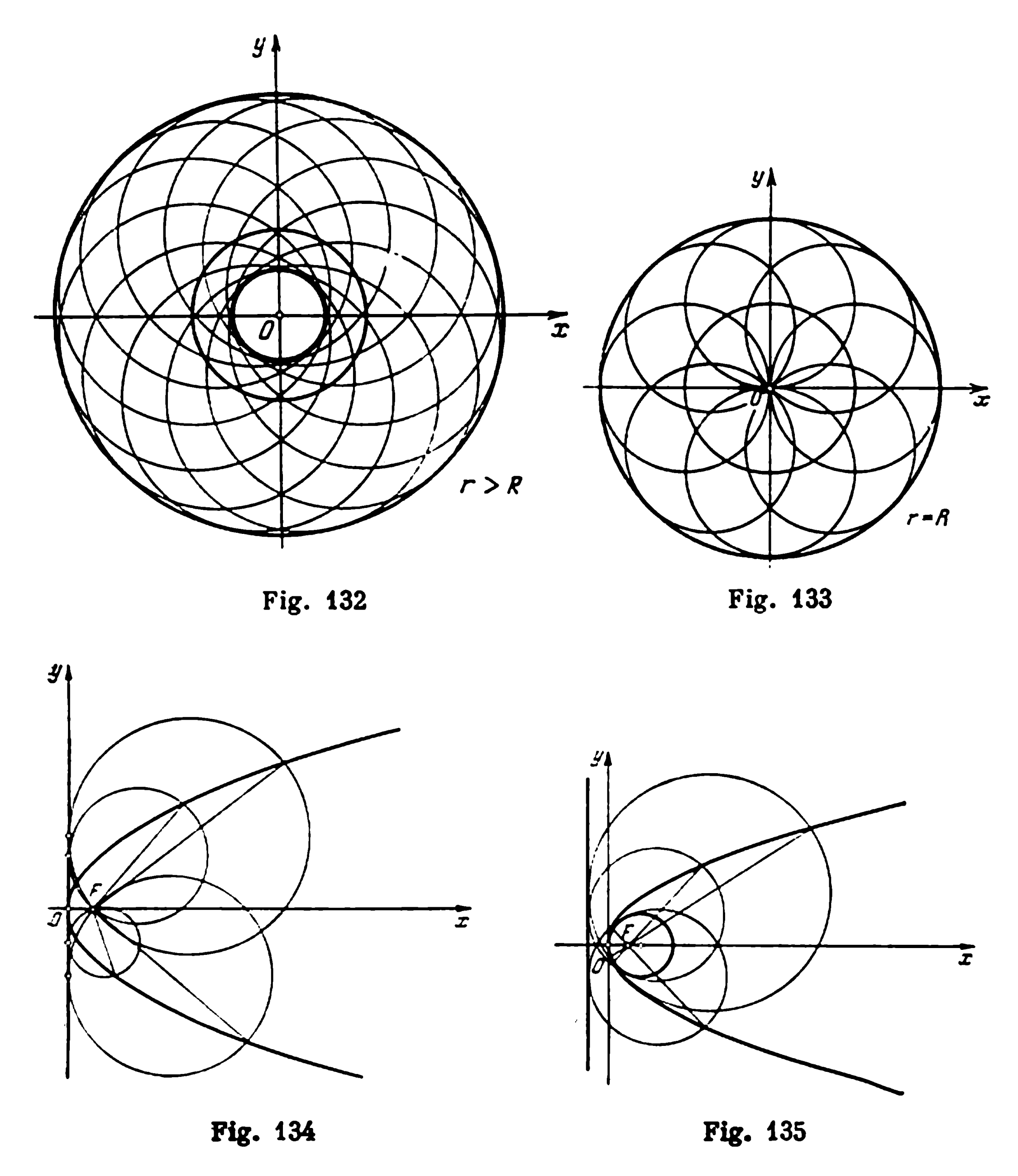


Fig. 132 Fig. 133

Fig. 134 Fig. 135

$y_0 = 0$, le rayon $R = b\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. L'équation de la famille est

$$(x - a\cos\varphi)^2 + y^2 = b^2\sin^2\varphi.$$

La courbe caractéristique est définie par le système:

$$\begin{cases}(x-a\cos\varphi)^2+y^2=b^2\sin^2\varphi,\\ a(x-a\cos\varphi)=b^2\cos\varphi.\end{cases}$$

De la première équation on tire: $|x-a\cos\varphi|\leqslant b\sin\varphi$, de la deuxième: $b^2|\cos\varphi|\leqslant ab\sin\varphi$, où $|\operatorname{tg}\varphi|\geqslant b/a$, c'est-à-dire que la courbe caractéristique n'est définie que pour les cercles tels que $|\operatorname{tg}\varphi|\geqslant b/a$. Eliminons le paramètre φ:

$$\cos\varphi=\frac{ax}{a^2+b^2},\quad \sin^2\varphi=1-\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

L'équation de la famille devient

$$\left(x-\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2+y^2=b^2\left(1-\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2}\right),$$

d'où $b^4x^2+y^2(a^2+b^2)^2-b^2(a^2+b^2)^2+a^2b^2x^2=0$, ou

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Il est immédiat de vérifier que pour ces valeurs du paramètre φ la courbe caractéristique sera l'enveloppe de la famille (fig. 136).

Si les cordes sont parallèles à l'axe Ox (fig. 137), on trouve par des raisonnements analogues que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2+b^2}=1,\quad |\operatorname{tg}\varphi|\leqslant\frac{d}{a}.$$

309. Indication. L'exercice se résout comme le précédent. Il faut prendre les équations paramétriques de l'hyperbole sous la forme $x=a\operatorname{ch}t$, $y=b\operatorname{sh}t$. Si les cordes sont parallèles à l'axe Oy, l'enveloppe n'existe que pour $b<a$. Son équation est $\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Elle n'est l'enveloppe que des cercles pour lesquels $|\operatorname{th}t|\leqslant b/a$ (fig. 138). Si les cordes sont parallèles à l'axe Ox, l'enveloppe existe pour toutes les valeurs de a et b.

Pour $b\neq a$, elle est définie par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$. Pour $b>a$, elle est l'enveloppe de tous les cercles (fig. 139), pour $b<a$, seulement de ceux pour lesquels $|\operatorname{th}t|\leqslant b/a$ (fig. 140).

Pour $b=a$ il n'existe pas d'enveloppe (fig. 141).

310. La parabole $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$. C'est l'enveloppe des cercles de la famille tels que $C\geqslant p/2$ (fig. 142).

311. $y^2=2(p+q)x$ (fig. 143).

312. Les points de l'enveloppe doivent vérifier le système d'équations $F(x,y,\alpha,\beta)=0$, $\varphi(\alpha,\beta)=0$, $\frac{D(F.\varphi)}{D(\alpha,\beta)}=0$.

313. Les quatre droites $x \pm y = \pm 1$ (fig. 144).

314. $x^k + y^k = a^k$, $k = m/(m + 1)$; pour $m = 2$, on obtient une astroïde ; pour $m = 1$, la parabole $(x - y)^2 - a\,(2x + 2y - a) = 0$; pour $m = -2$, le cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

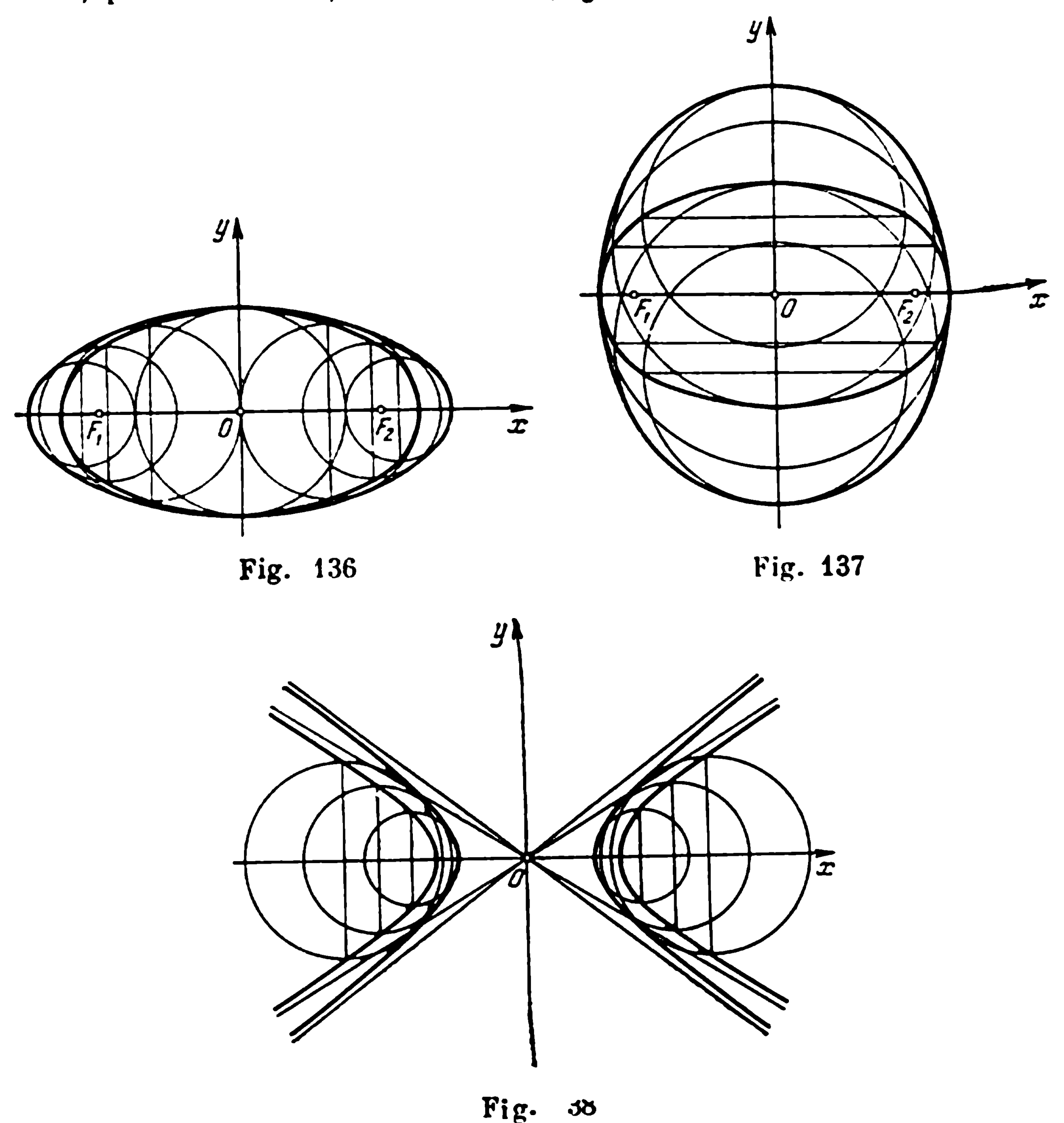


Fig. 136

Fig. 137

Fig. 138

315. Considérons dans le plan vertical un système de coordonnées xOy ayant pour origine le point donné et dont l'axe Oy est dirigé verticalement vers le haut. Les équations paramétriques des lignes de la famille sont : $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$, où α est le paramètre de la famille. On a

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \sin\alpha - gt,$$

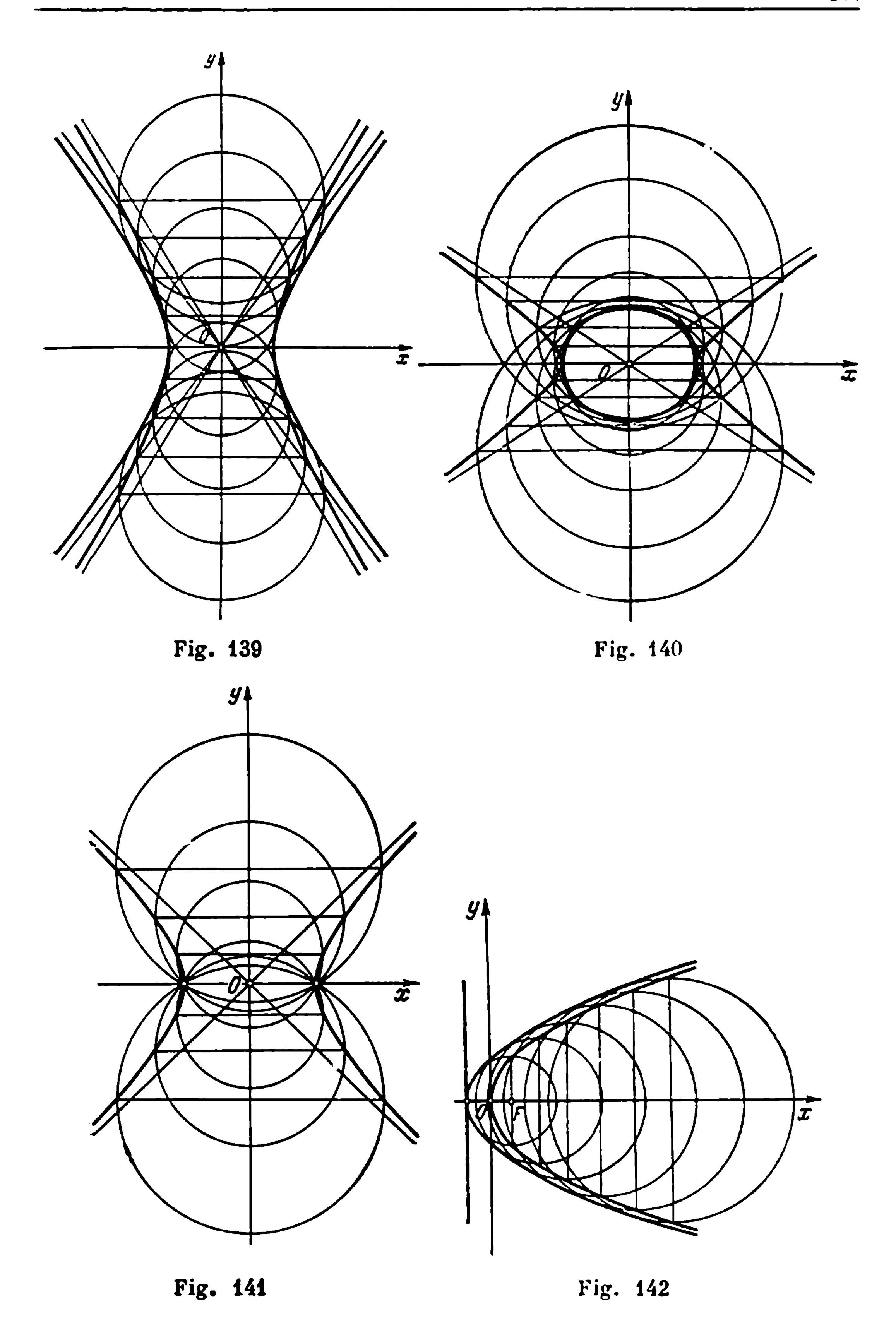


Fig. 139

Fig. 140

Fig. 141

Fig. 142

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -v_0 t \sin \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = v_0 t \cos \alpha.$$

En égalant le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(t, \alpha)}$ à zero, on obtient $v_0^2 t - g t^2 v_0 \times$ $\times \sin \alpha = 0$, d'où $t = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$ et les équations paramétriques de la

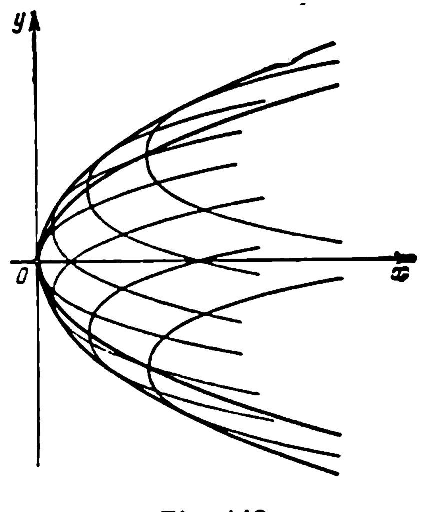


Fig. 143

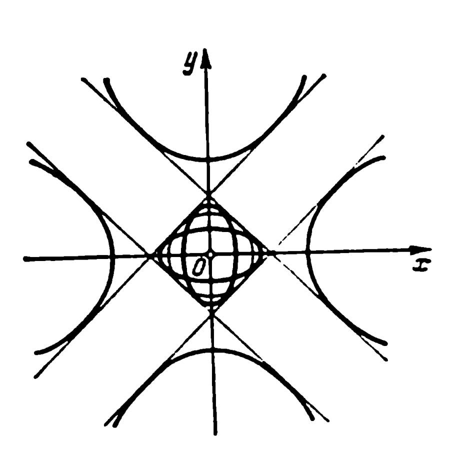


Fig. 144

courbe caractéristique s'écrivent:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{cotg} \alpha, \qquad y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g \sin^2 \alpha}.$$

En éliminant α, on trouve

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2}.$$

Donc, la courbe caractéristique est une parabole dont l'axe est dirigé verticalement vers le bas suivant Oy, le paramètre, égal à v_0^2/g et le sommet, le point $M_0\ (0, v_0^2/2g)$. La courbe caractéristique est l'enveloppe des trajectoires (fig. 145).

316. Equations de la famille (fig. 146): $x = a \cos v \cos u$, $y = a \sin v \sin u$. En annulant le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, on obtient $\sin^2 v \cos^2 u - \cos^2 v \sin^2 u = 0$ ou $\sin(u + v) \sin(u - v) = 0$ ou encore $v = -u$, $v = \pi - u$, $v = u$, $v = -\pi + u$. La courbe caractéristique est composée de quatre segments de droite:

$$x \pm y = \pm a.$$

Ce sont les côtés d'un carré dont les sommets sont les points de concours des diamètres du cercle confondus avec les axes de coordonnées

avec le cercle. Chaque côté du carré est une enveloppe (fig. 147).

317. $s=\frac{1}{27}[(4+9x_2)^{3/2}-(4+9x_1)^{3/2}]$.

318. $s=\sqrt{1+x_2^2}-\sqrt{1+x_1^2}-\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right|+\ln\frac{1+\sqrt{1+x_1^2}}{1+\sqrt{1+x_2^2}}$.

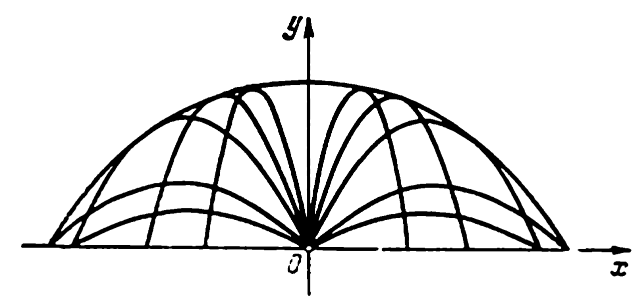


Fig. 145

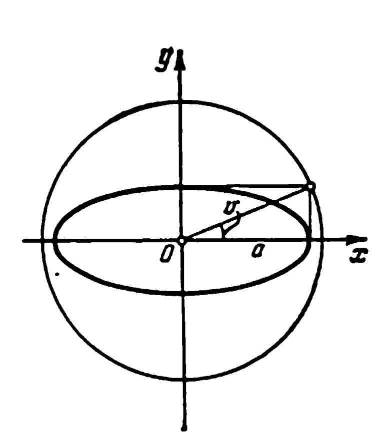


Fig. 146

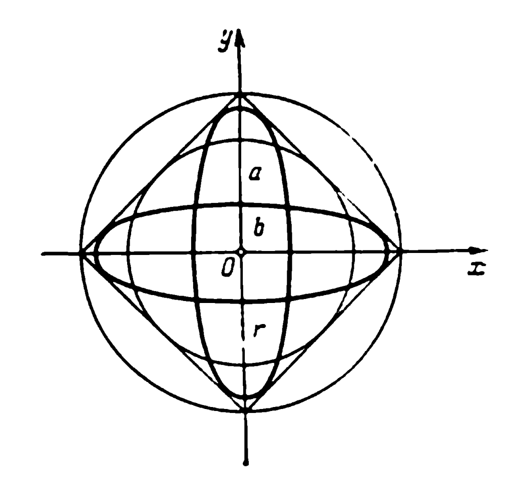


Fig. 147

319. $s=a\left(\operatorname{sh}\frac{x_2}{a}-\operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right)$.

320. $s=\ln\left|\frac{\operatorname{sh} x_2}{\operatorname{sh} x_1}\right|$.

321. $s=a(t_2^2-t_1^2)/2$.

322. $s=a(\ln\sin t_2-\ln\sin t_1)$, où $0<t_1,\ t_2\leqslant\pi/2$ ou $\pi/2\leqslant t_1,\ t_2<\pi$.

323. $s=\ln\operatorname{tg}(5\pi/12)$.

324. $s=2\sqrt{3}$.

325. $s=\frac{15}{4}+\ln 2$.

326. $s = \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

327. $s = (\operatorname{ch} 4 - 1)/2$. 328. $s = 24a$.

329. $s = 2a [\sqrt{2} + \ln (\sqrt{2} + 1)]$. 330. $s = 8a$.

331. $s = 8am (m + 1)$. 332. $s = 6a$.

333. $s = 8a$.

334. $s = 16a/3$.

335. $s = \frac{3}{2} \pi a$.

336. $s = \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})]$.

338. Une chaînette de sommet A.

342. $x = R \cos (s/R)$, $y = R \sin (s/R)$.

343. $x = \operatorname{Arsh} (s/a)$, $y = \sqrt{a^2 + s^2}$.

344. $k = |\sin x|/(1 + \cos^2 x)^{3/2}$.

345. $k = a/y^2$.

346. $k = \sqrt{p}/(p + 2x)^{3/2} = p^2/(y^2 + p^2)^{3/2}$.

347. $k = \frac{6}{t (4 + 9t^2)^{3/2}}$. 348. $k = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$.

349. $k = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}$. 350. $k = \frac{1}{4a \, |\sin (t/2)|}$.

351. $k = 2/(3a \, |\sin 2t|)$. 352. $k = (2 + \varphi^2)/a (1 + \varphi^2)^{3/2}$.

353. $k = \frac{3}{4a \, |\cos (\varphi/2)|}$. 354. $k = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$.

355, 356. $k = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}} = \frac{ab}{|a^2 - \varepsilon^2 x^2|^{3/2}}$,

où ε est l'excentricité.

357. $k = 0$.

358. $k = \frac{\left| P \left(Q \frac{\partial Q}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + Q \left(P \frac{\partial P}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right|}{(P^2 + Q^2)^{3/2}}$.

359. Indication. $h = |\boldsymbol{t} \times \Delta \boldsymbol{r}|$, où $\boldsymbol{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente.

363. $R = a \operatorname{cotg} t$.

367. Le centre de courbure de l'ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ correspondant au sommet A $(t = 0)$ est D $(c^2/a, 0)$, et au sommet B $(t = \pi/2)$, E $(0, -c^2/b)$, où $c^2 = a^2 - b^2$. La perpendiculaire abais-

sée sur AB à partir de C (a, b) coupe les axes de coordonnées en D et E (fig. 148).

368. $\left(x-\frac{c^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}$, $x^2+\left(y+\frac{c^2}{b}\right)^2=\frac{a^4}{b^2}$.

369. $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+(y-1)^2=1$.

370. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$, $(x+2)^2+(y+2)^2=2$.

371. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

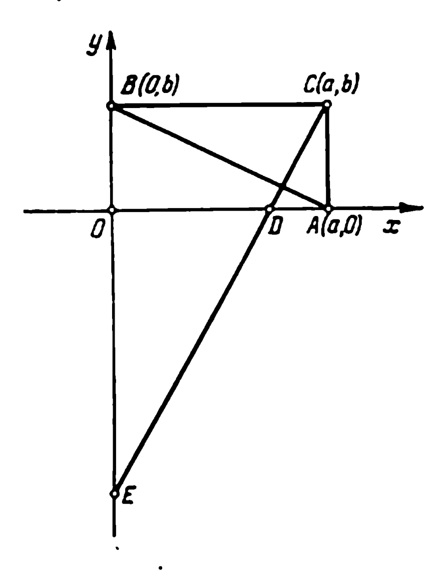


Fig. 148

372. La courbure est minimale aux points $((2n+1)a\pi, a+d)$ et maximale aux points $(2na\pi, a-d)$ (n étant un entier quelconque).

373. A $(3\pi/2, a)$ et B $(0, 0)$.

376. $r=\frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{p^2}$; $x_0=p+\frac{3y^2}{2p}$, $y_0=-\frac{y^3}{p^2}$.

Le cercle et la parabole présentent un contact d'ordre trois au sommet O (0, 0) de la parabole.

377. Supposons que la ligne l_1 est définie par son équation vectorielle $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(s)$, où s est la longueur d'arc de cette ligne, mesurée à partir de M. Prenons le point M pour origine des rayons vecteurs. Ecrivons les équations de la ligne l_1 par rapport au repère de Frenet en M. En portant les expressions de $\dot{\boldsymbol{r}}_1=\boldsymbol{t}_1$, $\ddot{\boldsymbol{r}}_1=k_1\boldsymbol{n}_1$ dans le développement $\boldsymbol{r}_1(s)=s\dot{\boldsymbol{r}}_1+\frac{s^2}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}_1+\ldots$, on obtient

$$x=s+\ldots,\ y=\frac{k_1}{2}s^2+\ldots \qquad (*)$$

De façon analogue, on obtient pour la ligne l_2

$$x=s+\dots,\quad y=\frac{k_2}{2}s^2+\dots \qquad (^{**})$$

Supposons que P est le point de la tangente l le plus proche de M et que la perpendiculaire abaissée sur l à partir de P coupe les lignes

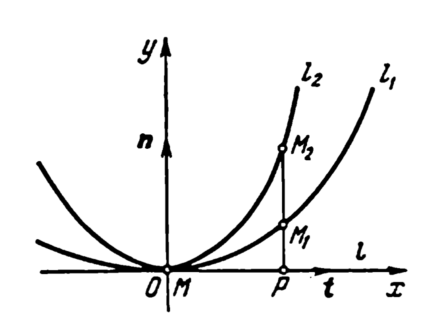


Fig. 149

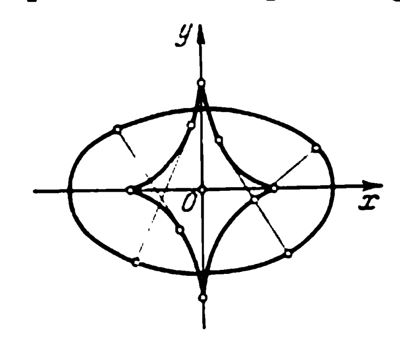


Fig. 150

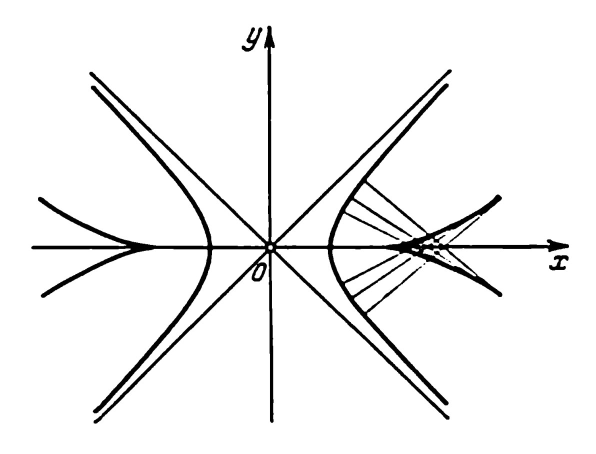


Fig. 151

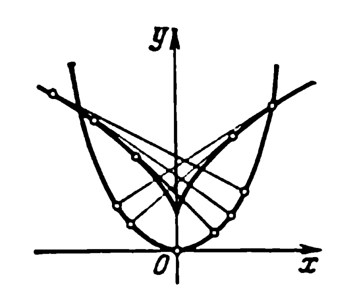


Fig. 152

l_1 et l_2 en M_1 et M_2. Des équations (*) et (**) on déduit respectivement :

$$|PM_1|=\frac{1}{2}k_1x^2+\dots,\quad |PM_2|=\frac{1}{2}k_2x^2+\dots$$

Comme $k_1<k_2$, il vient $|PM_1|<|PM_2|$ (fig. 149).

380. $y=1\pm\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)$.

381. $\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=\frac{2}{5}\left(\frac{7}{5}-x\right)$.

382. La développée est un point : le centre du cercle.

383. $X=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ Y=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$ (fig. 150).

384. $X=\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t,\ Y=\frac{a^2+b^2}{b}\sin^3 t$ (fig. 151).

385. $X=-4x^3,\ Y=3x^2+\frac{1}{2}$ (fig. 152).

386. $X=\frac{1}{2k-1}[(2k-2)x-4k^2x^{4k-1}]$,

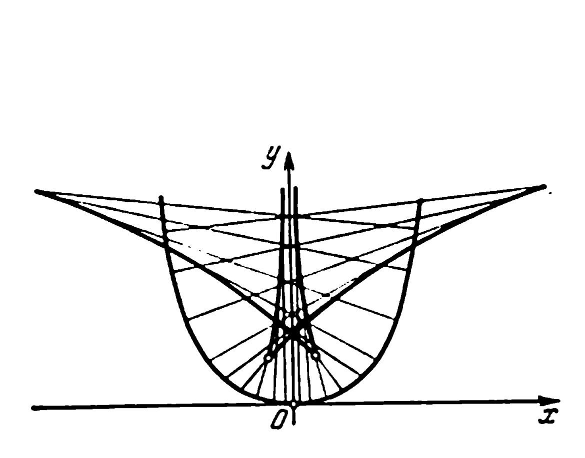


Fig. 153

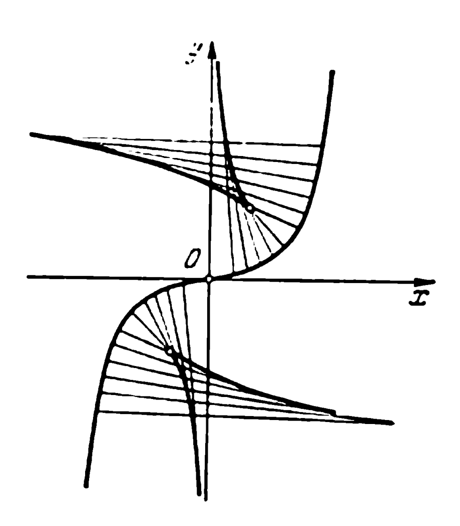


Fig. 154

$$Y=\frac{1+2k(4k-1)x^{4k-2}}{2k(2k-1)x^{2k-2}}\quad \text{(fig. 153).}$$

387. $X=\frac{1}{2k}[(2k-1)x-(2k+1)^2x^{4k+1}]$,

$$Y=\frac{1+(2k+1)(4k+1)x^{4k}}{2k(2k+1)x^{2k-1}}\quad \text{(fig. 154).}$$

388. $X=2x+\frac{1}{x},\ Y=\ln x-x^2-1$ (fig. 155).

389. $X=x+\cos x\frac{1+\cos^2 x}{\sin x},\ Y=-\frac{2\cos^2 x}{\sin x}$ (fig. 156).

390. $X=x-\frac{1+\cos^4 x}{\cos^2 x\sin 2x},\ Y=\operatorname{tg} x+\frac{1+\cos^4 x}{\sin 2x},\ -\pi/2<x<$ $<\pi/2$ (fig. 157).

391. $X=a\ln\operatorname{tg}(t/2),\ Y=a/\sin t$ ou $Y=a\operatorname{ch}(X/a)$ (fig. 158).

392. $X=\frac{a}{3}(\cos\varphi-\cos^2\varphi+2),\ Y=\frac{a}{3}(1-\cos\varphi)\sin\varphi$.

C'est une cardioïde (fig. 159). Pour le prouver, il suffit d'effectuer le changement de paramètre $\varphi=\pi-t$ et le changement de coordonnées $X'=-\left(X-\frac{2}{3}a\right),\ Y'=Y$.

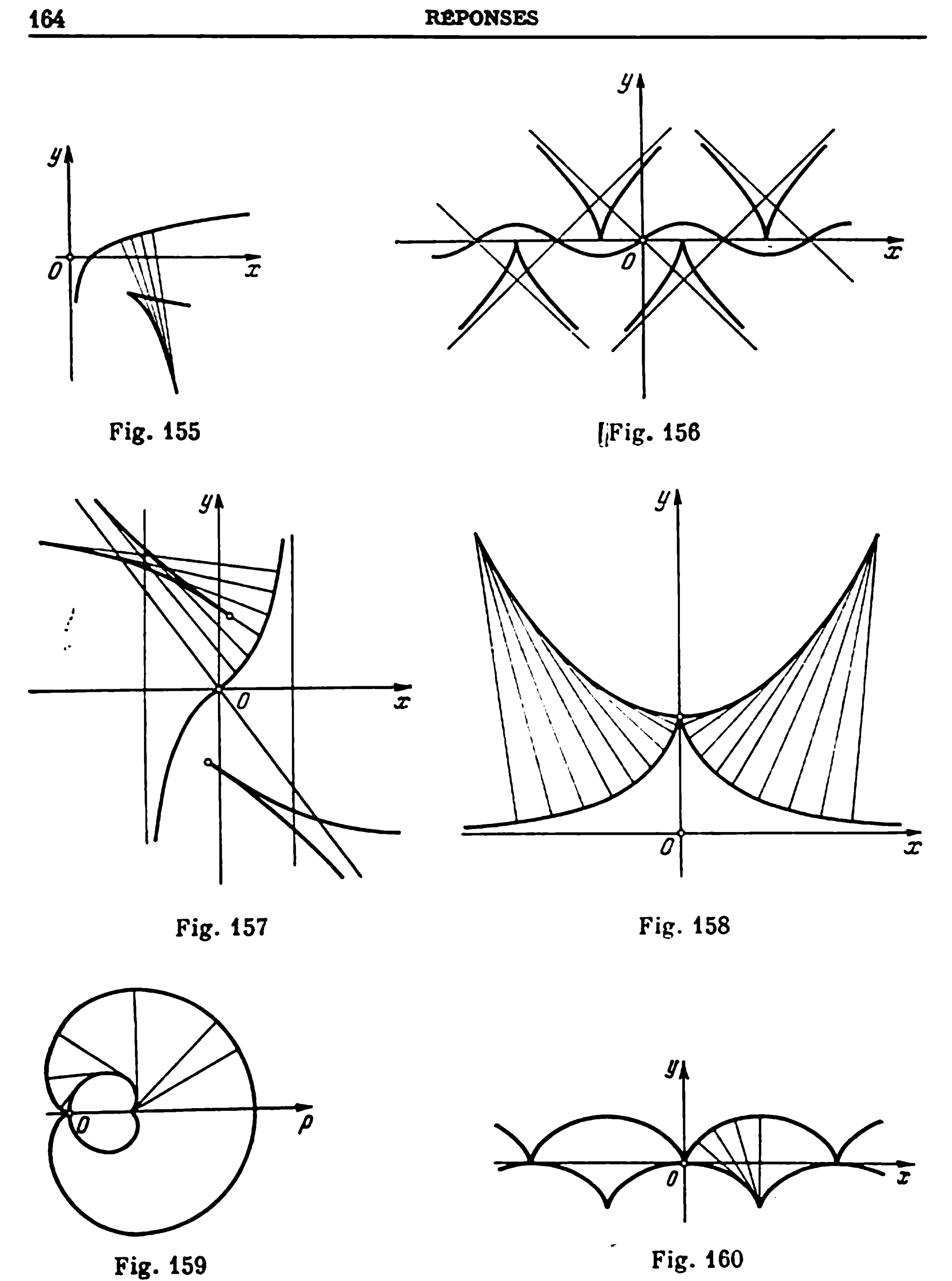


Fig. 155 Fig. 156

Fig. 157 Fig. 158

Fig. 159 Fig. 160

393. Fig. 160. **394.** Fig. 161.

395. Fig. 162. **396.** $\ln a = a^{\pi/2}$.

397. $X = a(\cos t + (t - C)\sin t)$, $Y = a(\sin t - (t - C)\cos t)$, où C est le paramètre de la famille de développantes (fig. 163).

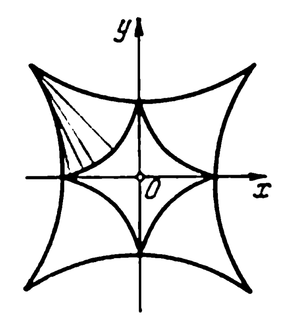


Fig. 161

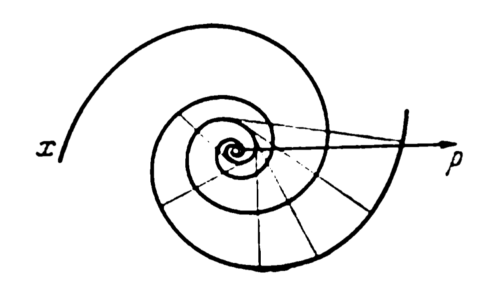


Fig. 162

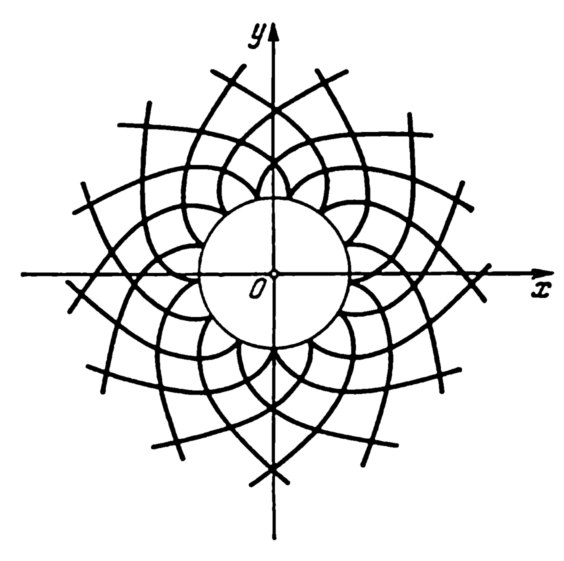


Fig. 163

398. $X = a\,(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $Y = a \sin t$. C'est une tractrice (fig. 158).

399. $X=\frac{t}{2}+\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\,(C-\ln(t+\sqrt{t^2+4}))$, $Y=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\times$ $\times\,(C-\ln(t+\sqrt{t^2+4}))$.

400. $s = 6a$.

I n d i c a t i o n. Utiliser la propriété suivante de la développée : si le rayon de courbure d'une ligne varie de façon monotone, la longueur d'arc compris entre deux points quelconques de la développée est égale à la différence des valeurs du rayon de courbure de la ligne en ces points.

401. **402.** $s = 8a$.

403. $(27s+8)^2=\left[4+9\frac{36R^2}{(27s+8)^2}\right]^3$.

404. $s = \sec a + \ln \operatorname{tg}(\alpha/2)$, $k = \sin\alpha\cos^2\alpha$, où $\operatorname{tg}\alpha = x$.

405. $R^2 = 2as$.

406. $R^2 + a^2 = a^2e^{-2s/a}$.

407. $s^2 + 9R^2 = 16a^2$.

408. Un cercle de rayon $1/a$ si $a \neq 0$, et une droite si $a = 0$.

409. Une spirale logarithmique.

410. Supposons que $s = \operatorname{tg} \alpha$. Alors $x = \frac{a}{2} \ln \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$, $y = \frac{a}{\cos\alpha}$; d'où $y = a \operatorname{ch}(x/2)$. On reconnaît l'équation de la chaînette.

411. Le cycloïde $x = a(2t + \sin 2t)$, $y = a(2 - \cos 2t)$.

412. La parabole $x = -\frac{a}{2\sin^2\alpha}$, $y = -a \operatorname{cotg} \alpha$.

413. La spirale logarithmique $x = \frac{a}{2} e^{\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha)$, $y = \frac{a}{2} e^{\alpha}(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

414. La développante du cercle $x = a(\alpha \sin\alpha + \cos\alpha)$, $y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$.

415. La chaînette $x = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$, $y = \frac{a}{\cos\alpha}$.

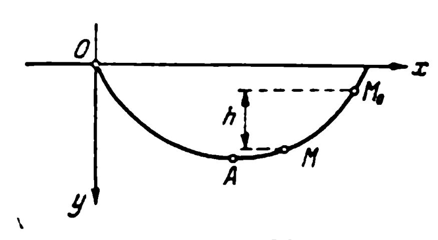


Fig. 164

416. Si l'on prend les axes de coordonnées comme sur la figure 164, les équations paramétriques de la cycloïde s'écrivent

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

La vitesse d'un corps en chute libre est $v = \sqrt{2gh}$. Dans notre cas

$$h = y - y_0 = a(\cos t_0 - \cos t),$$

où t_0 et t correspondent aux points M_0 et M. Donc

$$v = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}.$$

Mais la vitesse v est la dérivée du chemin s par rapport à T:

$$v = \frac{ds}{dT}.$$

En remarquant que pour la cycloïde

$$ds = 2a \sin(t/2)\, dt,$$

on obtient l'équation différentielle pour la détermination de T:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2a \sin(t/2)}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}.$$

En intégrant, on trouve le temps T mis par le point matériel pour se rendre de M_0 en A:

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \frac{2a \sin(t/2)\,dt}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{d\cos(t/2)}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

c.q.f.d.

417. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ (fig. 165). Projections: 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $y = a \sin(z/b)$; 3) $x = a \cos(z/b)$.

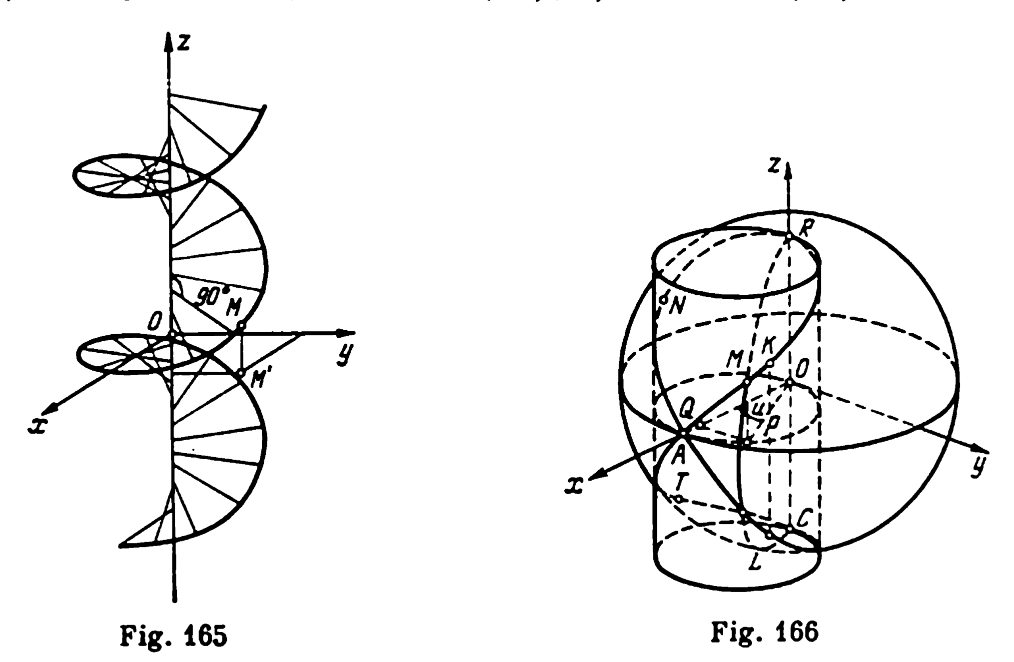


Fig. 165

Fig. 166

418. $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = be^{k\varphi}$.

419. En choisissant convenablement le système de coordonnées, on peut mettre les équations de l'image de la fenêtre de Viviani (fig. 166) sous la forme

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 - Rx = 0. \end{cases}$$

En prenant pour paramètre u la longitude du point M sur la sphère, on obtient à partir des triangles AOP, OPM et OPQ

$$x = R\cos^2 u, \quad y = R\cos u \sin u, \quad z = \pm R \sin u.$$

Il existe d'autres équations paramétriques. En particulier, en mettant l'équation

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

sous la forme

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$$

et en admettant que

$$x-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}\cos t,\quad y=\frac{R}{2}\sin t,$$

on obtient

$$x=\frac{R}{2}(1+\cos t),\quad y=\frac{R}{2}\sin t,\quad z=\pm R\sin\frac{t}{2}.$$

420. a) Introduisons un système de coordonnées polaires et définissons le point M par sa distance r au point O, sa lattitude $\psi =$

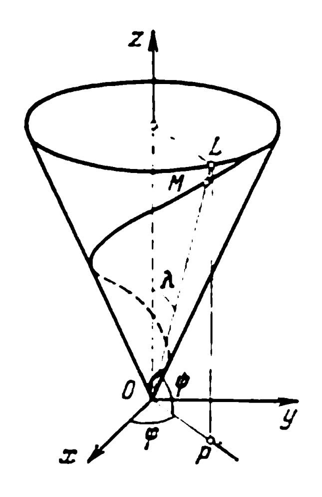


Fig. 167

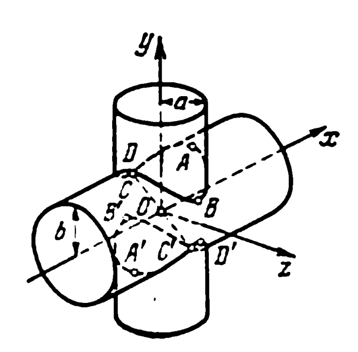


Fig. 168

$= \widehat{POL}$ et sa longitude $\varphi = \widehat{xOP}$ (fig. 167). Par hypothèse $\psi = \frac{\pi}{2} - \lambda$, où $\lambda = \widehat{zOL}$ et $\varphi = \omega t$. En définissant r à partir de la condition $\frac{dr}{dt} = mr$ et en portant la valeur trouvée $r = r_0e^{mt}$ dans les équations

$$\begin{cases} x=r\cos\psi\cos\varphi,\\ y=r\cos\psi\sin\varphi,\\ z=r\sin\psi,\end{cases}$$

on obtient

$$x = ae^{k\varphi}\cos\varphi,\ y = ae^{k\varphi}\sin\varphi,\ z = be^{k\varphi}.$$

où $k = m/\omega$, $a = r_0\sin\lambda$, $b = r_0\cos\lambda$,

b) $x = at\cos t$, $y = at\sin t$, $z = bt$.

421.

$$\begin{cases} x^2+z^2=a^2, \\ y^2+z^2=b^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=\pm\sqrt{b^2-a^2\sin^2 t}, \\ z=a\sin t. \end{cases}$$

Pour $a = b$ on obtient deux ellipses (fig. 168).

422. Indication. Eliminer le paramètre t.

423. $y = x^2$, $z = 0$; $z = x^3$, $y = 0$; $z^2 = y^3$, $x = 0$.

424. $x^2 - y^2 = a^2$, $z = 0$; $x = a \operatorname{ch}(z/c)$, $y = 0$; $y = a \operatorname{sh}(z/c)$, $x = 0$.

425. $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$, $z = 0$.

Indication. Eliminer z entre les équations données.

428. Par exemple, $y = x^2$, $z = e^x$.

429. Equations des cylindres cherchés:

$$x^2+(y-1)^2=1, \quad \frac{y}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2=1.$$

432. Les droites: $x = y$, $z = 1$; $x = -y$, $z = 1$; $x = y$, $z = -1$; $x = -y$, $z = -1$.

433. $\dfrac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-\frac{a\pi}{4}}{a}$.

434. $\dfrac{x-e}{e}=\dfrac{y-e^{-1}}{-e^{-1}}=\dfrac{z-1}{2}$.

435. $x=y+1=z$.

436. $x+\frac{a}{2}(4-\pi)=y=\frac{1}{\sqrt{2}}z-a$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

437. $M_1(-2, 12, 14)$, $M_2(-2, 3, -4)$.

438. $\left.\begin{array}{r} x=2, \\ 2y-z=0, \end{array}\right\} y+2z=0.$

439. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$; $x+2y+3z-6=0$.

L'intersection des tangentes avec le plan xOy est la parabole $y = \frac{3}{4}x^2$.

441. $\dfrac{X-x}{2yz}=\dfrac{Y-y}{z(R-2x)}=\dfrac{Z-z}{-Ry}$; $2yzX+z(R-2x)Y-RyZ=0$.

442. Le cercle

$$x^2+y^2=a^2/(a^2+b^2),\quad z=b/\sqrt{a^2+b^2}$$

(les équations de l'hélice sont $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$).

444. Soient $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ les équations paramétriques de la ligne. On a les identités

$$F(x(t),\ y(t),\ z(t)) \equiv 0,$$
$$\Phi(x(t),\ y(t),\ z(t)) \equiv 0,$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0.$$

Ces relations nous donnent

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}}.$$

Donc les équations de la tangente deviennent:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}},$$

celle du plan normal

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{vmatrix}(Z-z)=0,$$

ou

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{vmatrix}=0.$$

445. $\dfrac{X-x}{ay}=\dfrac{Y-y}{bx}=\dfrac{Z-z}{xy}$;

$ay(X-x)+bx(Y-y)+xy(Z-z)=0,\quad x^2+y^2\neq 0.$

446. $\dfrac{X}{x}-\dfrac{Y}{y}+\dfrac{Z}{z}=1,\quad xyz\neq 0.$

451. $3x + 3y + z + 1 = 0, \quad 3x - 3y + z - 1 = 0.$

$$108x - 18y + z - 216 = 0.$$

453. $bX + aY + abZ = 2ab.$

454. $[X \sin(t-\alpha) - Y \cos(t-\alpha)] \sin\alpha + Z = t \sin\alpha + \cos\alpha.$

455. $4x - y + z - 9 = 0.$

457. Normale principale: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$;

binormale: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

458. Normale principale: $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$;

binormale: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

460. $A(1, \ln 2, -4)$.

462. $t = \frac{j+k}{\sqrt{2}}, \quad n = \frac{2i-j+k}{\sqrt{6}}, \quad b = \frac{i+j-k}{\sqrt{3}}.$

463. $t = -\frac{3}{5}\cos t\, i + \frac{3}{5}\sin t\, j - \frac{4}{5}k, \quad n = \sin t\, i + \cos t\, j,$

$$b = \frac{4}{5}\cos t\, i - \frac{4}{5}\sin t\, j - \frac{3}{5}k.$$

464. $t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{t}{2} i + \cos\frac{t}{2} j - k\right), \quad n = \cos\frac{t}{2} i - \sin\frac{t}{2} j,$

$$b = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{t}{2} i + \cos\frac{t}{2} j + k\right).$$

466. Tangente:

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - bt}{b};$$

plan normal:

$$(a\sin t)X - (a\cos t)Y - bZ + b^2 t = 0;$$

binormale:

$$\frac{X - a\cos t}{a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-b\cos t} = \frac{Z - bt}{a};$$

plan osculateur:

$$(b\sin t)X - (b\cos t)Y + aZ - abt = 0;$$

normale principale:

$$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t}, \quad Z = bt;$$

plan rectifiant:

$$X \cos t + Y \sin t - a = 0;$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a \sin t\, i + a \cos t\, j + bk), \quad n = -\cos t\, i - \sin t\, j,$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b \sin t\, i - b \cos t\, j + ak).$$

467. $\rho_1 = r - \frac{r \cdot k}{\dot{r} \cdot k}\dot{r}, \quad \rho_2 = r - \frac{r \cdot k}{\ddot{r} \cdot k}\ddot{r},$

$$\rho_3 = r - \frac{\dot{r} \cdot k}{k \dot{r} \ddot{r}}(\dot{r} \times \ddot{r}),$$

où le point surmontant r signifie que la dérivation a lieu par rapport à s.

468. $s = \sqrt{a^2+b^2}\, t.$

469. $X = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad Z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

470. $s = 8\sqrt{2}a.$

471. $s = 9a.$

473. $s = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t.$

474. $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2.$

I n d i c a t i o n. Les coordonnées cylindriques r, φ et z sont reliées aux coordonnées rectangulaires cartésiennes x, y, z par les relations

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \qquad \text{(fig. 169).}$$

475. $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta\, d\varphi^2.$

I n d i c a t i o n. On passe des coordonnées sphériques ρ, θ, φ aux coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y et z à l'aide des formules

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad \text{(fig. 170).}$$

476. I n d i c a t i o n. En appliquant la formule de Frenet

$$\dot{t} = kn, \quad \dot{n} = -kt + \varkappa b, \quad \dot{b} = -\varkappa n$$

et puisque $\dot{r} = t$, on obtient

$$\ddot{r} = kn, \quad \dddot{r} = \ddot{t} = (kn)^{\cdot} = -k^2 t + k\varkappa b + \dot{k}n.$$

477. Si l'on met le vecteur cherché sous la forme

$$\omega = at + bn + cb$$

et que l'on utilise l'hypothèse de l'exercice, on trouve

$$\omega = \varkappa t + kb.$$

Le vecteur ω est le vecteur de la vitesse angulaire instantanée du repère de Frenet lorsque le point se déplace sur la ligne à une vitesse égale à l'unité.

484. $k = a/(a^2+b^2)$, $\varkappa = b/(a^2+b^2)$. 485. $k = 2/(1+a^2)$.

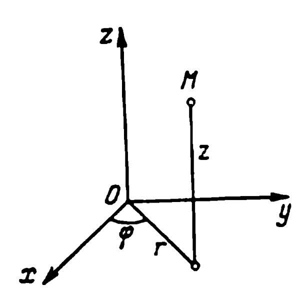


Fig. 169

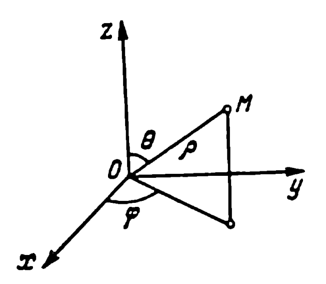


Fig. 170

486. $k = \varkappa = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2\,t}$. 487. $k = -\varkappa = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$.

488. $k = -\varkappa = 2t/(1+2t^2)^2$.

489. $k = \frac{3}{25\sin t\cos t}$, $\varkappa = \frac{4}{25\sin t\cos t}$.

490. $a = b$.

491. Les points correspondant aux valeurs du paramètre

$$t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

492. Les points correspondant aux valeurs du paramètre

$$t = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

494. $x - 4y + 2z + 1 = 0$.

495.
$$\begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

496. $f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$.

497. a) Soit a le vecteur unitaire de la direction fixe. On a

$$a \cdot t = \cos v \qquad (v = \text{const}). \qquad (*)$$

En dérivant (*) par rapport à s, on obtient:

$$a \cdot \dot{t} = 0.$$

Donc, $ka \cdot n = 0$. En excluant le cas $k \equiv 0$ (des droites), on trouve

$$a \cdot n = 0. \qquad (**)$$

Donc, les normales principales sont perpendiculaires à la direction fixe.

Inversement, si au point courant le vecteur $\boldsymbol{n}$ est perpendiculaire à la direction fixe, alors l'équation (*) est satisfaite.

b) En admettant que $\varkappa \neq 0$ et en tenant compte de la troisième formule de Frenet, on obtient à partir de (**)

$$\boldsymbol{a} \cdot \dot{\boldsymbol{b}} = 0,$$

d'où

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \text{const.} \qquad (***)$$

Inversement, en dérivant (***) on obtient (**).

c) La dérivation de (**) nous donne

$$k\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t} = \varkappa \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},$$

d'où

$$\frac{k}{\varkappa} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})/(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t}) = \text{const.}$$

Inversement, de la première et de la troisième formule de Frenet on déduit que

$$\frac{\dot{\boldsymbol{t}}}{k} + \frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{\varkappa} = 0.$$

D'où

$$\frac{\varkappa}{k} \dot{\boldsymbol{t}} + \dot{\boldsymbol{b}} = 0, \qquad \frac{\varkappa}{k} \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} = \text{const} = \boldsymbol{a}.$$

En multipliant scalairement par $\boldsymbol{n}$, on obtient $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Donc, la condition (**) est satisfaite.

498. I n d i c a t i o n.

$$\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}}\,\dot{} = k^5 \left(\frac{\varkappa}{k}\right)^{\cdot};$$

se servir ensuite de l'exercice 497.

501. Soit $(1, u, v)$ une direction fixe. L'angle d'une tangente à la ligne et cette direction est défini par l'égalité

$$\cos \varphi = \frac{a + 2btu + 3ct^2 v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}\, \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}}.$$

La condition d'indépendance de φ par rapport à t se traduit par le fait que la fraction

$$\frac{(3cvt^2 + 2but + a)^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2} = \frac{9c^2v^2t^4 + 12bcuvt^3 + 2\,(2b^2u^2 + 3acv)\,t^2 + 4abut + a^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2}$$

ne dépend pas de t. Pour cela il suffit que

$$4abu = 0, \quad 12bcuv = 0, \quad \frac{9c^2v^2}{9c^2} = \frac{2\,(2b^2u^2 + 3acv)}{4b^2} = \frac{a^2}{a^2},$$

d'où

$$u = 0,\ v^2 = 1,\ 2b^2 = \pm 3ac.$$

502. Indication. Dans ce cas $e \cdot t = 0$. Dériver cette relation et utiliser les formules de Frenet.

505. Les équations des lignes peuvent être mises sous la forme

$$r = r(s), \qquad \rho = r + \lambda n. \qquad (*)$$

De la condition $\rho' \perp n$ on déduit que $\lambda =$ const et de la coplanation des vecteurs ρ', ρ'', n que

$$\dot{\varkappa} + \lambda(\dot{k}\varkappa - k\dot{\varkappa}) = 0.$$

Divisons la dernière égalité par $\varkappa^2$:

$$\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)^{\cdot} + \lambda\left(\frac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot} = 0, \qquad (**)$$

$$-\frac{1}{\varkappa} + \lambda\frac{k}{\varkappa} = -\mu,$$

d'où

$$\lambda k + \mu\varkappa = 1. \qquad (***)$$

Inversement. (***) entraîne (**). En portant la valeur de λ déduite de (**) dans (*), on obtient l'équation de la ligne cherchée.

509. Par hypothèse $t^* = t$. En dérivant cette égalité par rapport à s, on obtient

$$k^* n^* \frac{ds^*}{ds} = kn.$$

Comme $n^* = n$, il vient

$$k^* \frac{ds^*}{ds} = k. \qquad (*)$$

En dérivant l'égalité $b^* = b$ par rapport à s, on obtient

$$-\varkappa^* n \frac{ds^*}{ds} = -\varkappa n,$$

d'où

$$\varkappa^* \frac{ds^*}{ds} = \varkappa. \qquad (**)$$

En comparant enfin (*) et (**), on trouve les relations cherchées:

$$\frac{k^*}{k} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{\varkappa^*}{\varkappa}.$$

510. $k^* = \dfrac{\sqrt{k^2+\varkappa^2}}{|s|\,k}$, $\quad \varkappa^* = \dfrac{\varkappa^2}{sk(k^2+\varkappa^2)}\left(\dfrac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot}$. Si $\dfrac{k}{\varkappa} =$ const, alors $\varkappa^* = 0$.

512. $x = \dfrac{k}{k^2+\varkappa^2}\cos\varphi$, $\quad y = \dfrac{k}{k^2+\varkappa^2}\sin\varphi$, $\quad z = \dfrac{\varkappa}{k^2+\varkappa^2}\varphi$.

513. La courbure et la torsion de l'hélice sont constantes; il existe donc une infinité de couples de valeurs de λ et de μ telles que $\lambda k + \mu \varkappa = 1$. Il leur correspond des hélices situées sur des cylindres coaxiaux au cylindre donné.

Réciproquement, supposons qu'à une ligne de Bertrand C correspondent deux lignes possédant avec elle des normales principales communes. Alors

$$\begin{cases} \lambda_1 k + \mu_1 \varkappa = 1, \\ \lambda_2 k + \mu_2 \varkappa = 1, \end{cases} \qquad (*)$$

où $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et par suite $\mu_1 \neq \mu_2$. $\lambda_1/\lambda_2 \neq \mu_1/\mu_2$ sinon de $(*)$ il s'ensuivrait que $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$. Donc $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$ et des relations $(*)$ on obtient des valeurs bien définies de k et de $\varkappa$ (des constantes), c'est-à-dire que la ligne est une hélice.

514. $k = \varkappa = \frac{a}{2a^2 + s^2}$. 515. $k = \varkappa = \frac{c\sqrt{2}}{4c^2 + s^2}$.

517. La réciproque n'est pas vraie, puisque $\dot{\varkappa}$ figure dans l'expression du vecteur $\dddot{r}$.

518. La distance de deux points de la ligne étant équivalente à la longueur d'arc Δs entre ces points, le problème se ramène au calcul de la plus courte distance entre les droites

$$\rho = r(s) + e(s)\lambda,$$

$$\rho = r(s + \Delta s) + e(s + \Delta s)\lambda,$$

où $e(s)$ est successivement égal à t, n, b.

Calculons la plus courte distance à l'aide de la formule:

$$d = \frac{|(r(s+\Delta s) - r(s),\ e(s),\ e(s+\Delta s))|}{\sqrt{(e(s) \times e(s+\Delta s))^2}}.$$

Pour $e = t$

$$d_1 = \frac{|(\Delta r,\ t(s),\ t(s+\Delta s))|}{\sqrt{(t(s) \times t(s+\Delta s))^2}} = \frac{|(\Delta r,\ t,\ \Delta t)|}{\sqrt{(t \times \Delta t)^2}},$$

$$\Delta r = t\Delta s + \frac{1}{2} kn\Delta s^2 + \frac{1}{6}(\varkappa kb + \dot{k}n - k^2 t)\Delta s^3 + \ldots,$$

$$\Delta t = kn\Delta s + \ldots,$$

d'où

$$d_1 = \frac{\Delta s^3}{6} k\varkappa + \ldots;$$

d_1 est du troisième ordre de petitesse si $k\varkappa \neq 0$. On trouve de façon analogue que d_2 et d_3 sont du premier ordre de petitesse.

520. Si le pas de l'hélice est égal au périmètre du cercle du cylindre.

522. $R=(e^t+e^{-t})^2\sqrt{\frac{1}{2}+(e^t-e^{-t})^2}$.

523. $R=3\sqrt{2}e^t$.

526. Une hélice de pas égal à celui de l'hélice donnée, située sur un cylindre circulaire d'axe Oz et de rayon b^2/a.

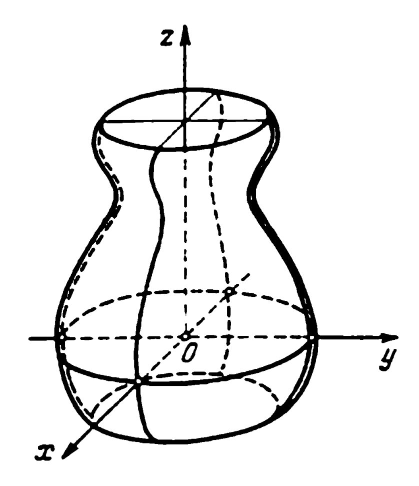


Fig. 171

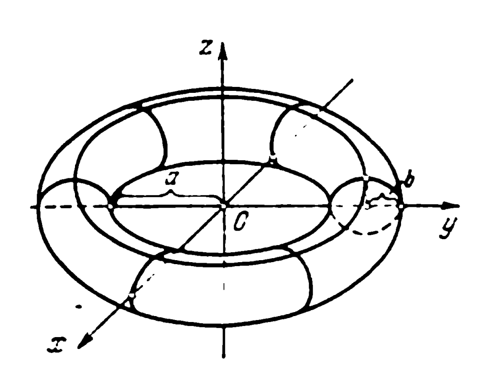


Fig. 172

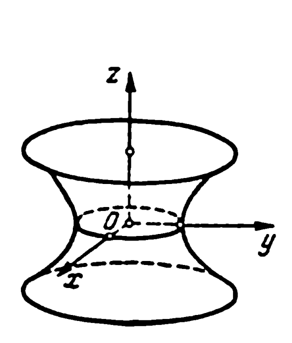


Fig. 173

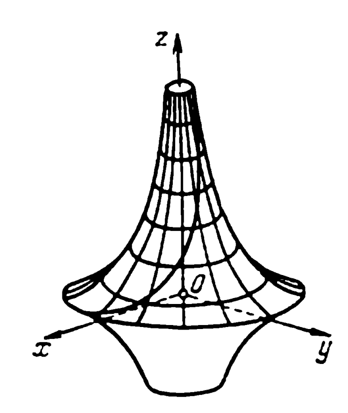


Fig. 174

528. $x=f(u)\cos v$, $y=f(u)\sin v$, $z=g(u)$ (fig. 171).

529. $x=(a+b\cos u)\cos v$, $y=(a+b\cos u)\sin v$, $z=$ $=b\sin u$ (fig. 172).

530. $x=a\operatorname{ch}(u/a)\cos v$, $y=a\operatorname{ch}(u/a)\sin v$, $z=u$ (fig. 173).

531. $x=a\sin u\cos v$, $y=a\sin u\sin v$, $z=a(\ln \operatorname{tg}(u/2)+$ $+\cos u)$ (fig. 174).

532. En écrivant les équations des deux familles de génératrices rectilignes et en explicitant x, y, z, on obtient

$$x = a(u + v), \quad y = b(v - u), \quad z = 2uv \quad \text{(fig. 175)}.$$

Les équations paramétriques de la surface $z = pxy$ sont:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = puv.$$

533. $x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = v.$

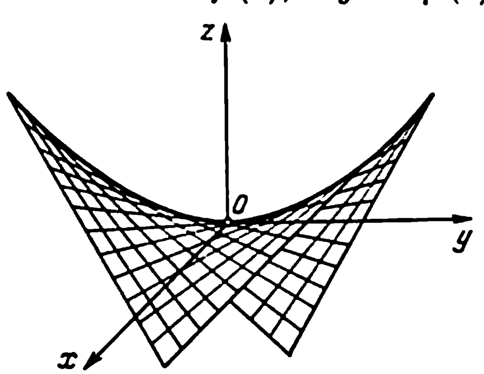


Fig. 175

534. Le cylindre hyperbolique $x = a \operatorname{ch} u$, $y = b \operatorname{sh} u$, $z = v$ (voir fig. 12).

Le cylindre parabolique $x = u$, $y = u^2$, $z = v$ (cf. fig. 11).

535. $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{e}.$

536. $x = u + v$, $y = u^2 + 2v$,

$z = u^3 + 3v.$

537. Les équations paramétriques de la surface sont:

$$x = \cos u - v, \quad y = \sin u + 3v, \quad z = -2v,$$

d'où

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 = 1.$$

538. I n d i c a t i o n. Si la ligne directrice est donnée par l'équation

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t),$$

alors les équations paramétriques de la surface cylindrique seront:

$$x = X(t) + \lambda l, \quad y = Y(t) + \lambda m, \quad z = Z(t) + \lambda n.$$

En éliminant λ et t, on obtient une équation de la forme:

$$f(nx - lz, \ ny - mz) = 0.$$

539. $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 = an(ny - mz).$

540. b) Par exemple, $x = v^2 + 1, \quad y = v^2 - 1, \quad z = 2v;$

c) $\dfrac{x-16}{3} = \dfrac{y-12}{2} = \dfrac{z-4}{-1}.$

541. $x - a = v[f(u) - a], \quad y - b = v[\varphi(u) - b], \quad z - c = v[\psi(u) - c].$

En éliminant les paramètres u et v entre ces équations, on obtient une équation de la forme

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \ \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

542. $(bz - cy)^2 = 2p\,(z - c)\,(az - cx)$.
543. $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2$.
544. A appartient à la surface, B, non.
545. Un cylindre elliptique.
546. L'ellipsoïde $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$.

547. Le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$.

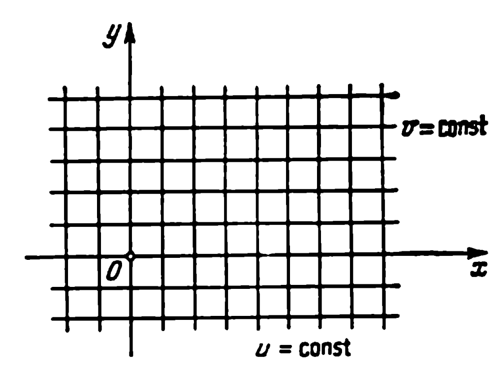


Fig. 176

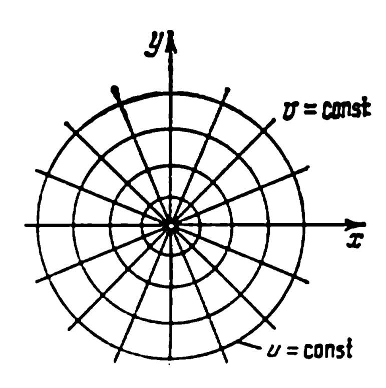


Fig. 177

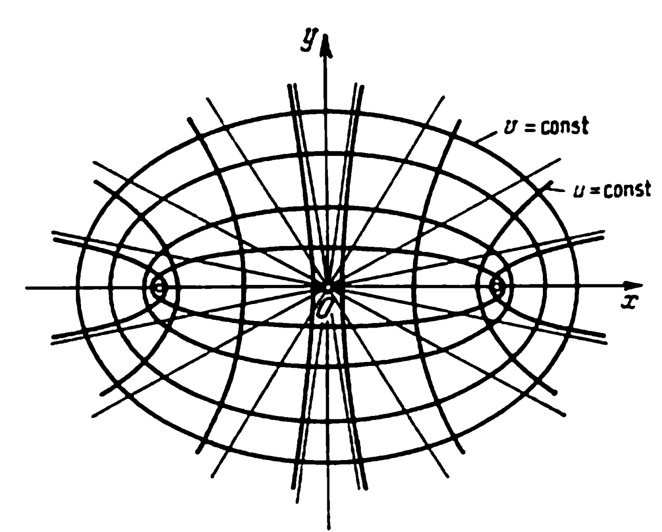


Fig. 178

548. u est la distance d'un point au sommet du cône, v la longueur de l'arc de ligne dont tous les points se trouvent à une distance l du sommet.

549. Deux familles de droites parallèles (fig. 176).

550. Les demi-droites issues de l'origine des coordonnées et une famille de cercles concentriques de centre l'origine des coordonnées (fig. 177).

551. Les lignes v = const sont constituées d'une famille d'ellipses cofocales et du segment $[-1, 1]$ de l'axe Ox; les lignes u = = const, d'une famille d'hyperboles cofocales et des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[1, \infty[$ de l'axe Ox (fig. 178).

552. Des génératrices rectilignes.

553. a) $x = a\cos(u+v)$, $y = a\sin(u+v)$, $z = bu$;

b) $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = bu + v$;

c) $x = a\cos(u+v)$, $y = a\sin(u+v)$, $z = b(u-v)$.

554. $r = \rho(u) + v\rho'(u)$.

555. Les équations de la figure sont:

$$x = a(\cos u - v\sin u),\quad y = a(\sin u + v\cos u),\quad z = b(u+v).$$

Cette figure n'est pas une surface, mais elle le devient si l'on rejette

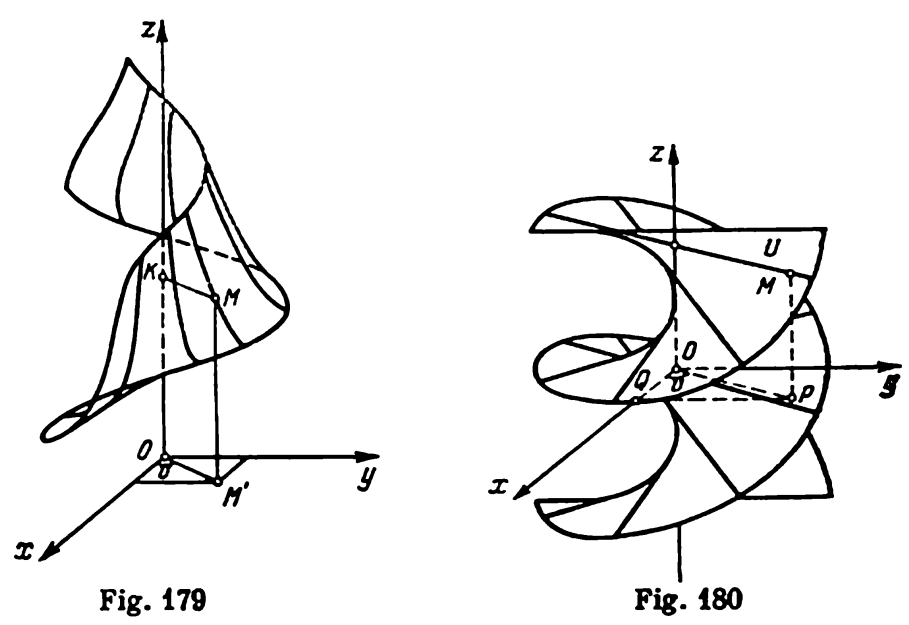


Fig. 179

Fig. 180

les points de l'hélice initiale.

556. Si l'on prend l'axe Oz pour axe de révolution, les équations de l'hélicoïde s'écrivent

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = f(u) + av,$$

où u est la distance $|MK|$ du point M de l'hélicoïde à l'axe; v est l'angle de rotation du plan du profil mesuré à partir du plan xOz; a est une constante égale au rapport de la vitesse du mouvement de translation à la vitesse angulaire (fig. 179).

557. Equations de l'hélicoïde normal (fig. 180): $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$. Equations de l'hélicoïde oblique (fig. 181): $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = mu + av$.

558. L'hélicoïde normal: $x = a(1-u)\cos v$, $y = a(1-u)\sin v$, $z = bv$.

559. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = f(v)$. On obtient un hélicoïde normal si $f(v) = av + b$.

560. $z(x^2 + y^2) = 2axy$.

561. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = a/\cos v$.

562. $r = \rho(s) + a\left(\frac{\ddot{\rho}}{|\ddot{\rho}|}\cos\alpha + \frac{\dot{\rho}\times\ddot{\rho}}{\dot{\rho}\times\ddot{\rho}}\sin\alpha\right)$, où α est l'angle de la normale principale de la ligne et du rayon du cercle aboutissant à un point quelconque de la surface tubulaire.

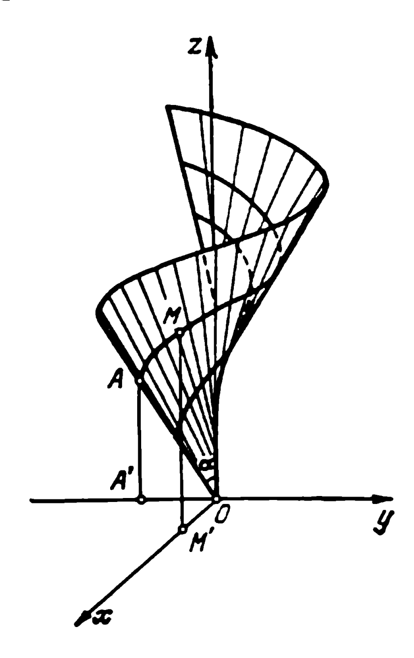


Fig. 181

565. Effectuons le changement de variables

$$u = c\cos\frac{\varphi-\psi}{2}, \quad v = \frac{\varphi+\psi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi-\psi < \frac{\pi}{2},$$

et portons ces valeurs dans l'équation vectorielle de l'hélicoïde

$$r = u(\cos v\, i + \sin v\, j) + avk.$$

En admettant que

$$\rho(t) = c(\cos t\, i + \sin t\, j) + atk,$$

on obtient l'équation de l'hélicoïde sous la forme

$$r = \frac{1}{2}\rho(\varphi) + \frac{1}{2}\rho(\psi).$$

566. Les équations des paraboloïdes

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$$

peuvent être mises sous la forme

$$r = \left(ui + \frac{u^2}{2p} k\right) + \left(vj \pm \frac{v^2}{2q} k\right).$$

567. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point arbitraire de la conique $f(x, y, z) = 0$. Une droite quelconque passant par M_0, soit

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{1},$$

coupe cette conique en un point M dont la cote z est définie à partir de l'équation du second degré

$$f(x_0 + u(z-z_0),\ y_0 + v(z-z_0),\ z) = 0.$$

Cette équation admet par hypothèse une racine z_0, d'où il résulte que la deuxième racine qui est la cote du point M est une fonction rationnelle de u et de v, c.q.f.d.

569. a) Tangentes:

$$y = 0, \quad z = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\lambda}{\lambda};$$

plans normaux:

$$x - 1 = 0, \quad (x-1) + y + \lambda(z-\lambda) = 0;$$

b) $\cos\alpha = -1/\sqrt{2+\lambda^2}$.

571. $18x + 3y - 4z - 41 = 0$.

572. $3x - y - 2z - 4 = 0$; $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$.

573. $6x + 3y - 2z - 7 = 0$; $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}$.

574. $x + y - \sqrt{2}z = 0$; normale: $\frac{x-\sqrt{2}}{1} = \frac{y-\sqrt{2}}{1} = \frac{z-2}{-\sqrt{2}}$; tangente à la ligne $u = 2$: $x + y = 2\sqrt{2}$, $z = 2$.

575. $3x + 12y - z - 18 = 0$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$.

576. $3x + 4y + 12z - 169 = 0$; $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$.

577. $3x - 2y + 3z - 4 = 0$; $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

578. $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$;

$$x = x_0\left(1 + \frac{t}{a^2}\right), \quad y = y_0\left(1 + \frac{t}{b^2}\right), \quad z = z_0\left(1 + \frac{t}{c^2}\right).$$

579. $x \cos u \cos v + y \cos u \sin v - z \sin u + a (\ln \operatorname{tg} (u/2)) \times$ $\times \sin u = 0$.

580. $xa \sin v - ya \cos v + zu - auv = 0$;

$$\frac{x-u \cos v}{a \sin v} = \frac{y-u \sin v}{-a \cos v} = \frac{z-av}{u}.$$

Les normales font un angle constant avec l'axe Oz le long de la ligne $u = u_0$. Les normales sont parallèles au plan constant le long de la ligne $v = v_0$.

581. $12x + 9y + 20z - 230 = 0$.

582. $x + y + z - 3 = 0$.

586. Les coordonnées curvilignes des points sont définies par les équations

$$\operatorname{tg} u = \pm C/\sqrt{A^2+B^2}, \quad \operatorname{tg} v = B/A.$$

593. $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s))\, \dot{\boldsymbol{r}}(s)\, \ddot{\boldsymbol{r}}(s) = 0$.

Le plan tangent est invariable le long de la génératrice $s = s_0$; il est confondu avec le plan osculateur à la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ pour $s = s_0$.

598. L'équation du plan tangent peut être mise sous la forme

$$f'(c)\,(x \sin c - y \cos c) - u\,[ax \cos c + ay \sin c - z + f(c)] = 0,$$

d'où il résulte que tous les plans passent par la droite

$$y = x \operatorname{tg} c, \quad ax \cos c + ay \sin c - z + f(c) = 0.$$

599. Prenons le point d'intersection des normales pour origine des rayons vecteurs. Alors

$$\boldsymbol{r} \cdot \partial_u \boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{r} \cdot \partial_v \boldsymbol{r} = 0,$$

d'où $\boldsymbol{r}^2 = \text{const}$.

601. Si $\boldsymbol{a}$ est le vecteur directeur de la droite et si l'origine des rayons vecteurs se trouve sur cette droite, alors les vecteurs $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$ et $\partial_u \boldsymbol{r} \times \partial_v \boldsymbol{r}$ sont coplanaires et

$$\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{a} \times (\partial_u \boldsymbol{r} \times \partial_v \boldsymbol{r})) = 0.$$

La règle du double produit vectoriel donne

$$(\boldsymbol{r} \cdot \partial_u \boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{a} \cdot \partial_v \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{r} \cdot \partial_v \boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{a} \cdot \partial_u \boldsymbol{r}) = 0.$$

Ceci exprime la nullité du déterminant fonctionnel:

$$\partial_u \boldsymbol{r}^2 \partial_v (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) - \partial_v \boldsymbol{r}^2 \partial_u (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = 0.$$

Il s'ensuit qu'entre $\boldsymbol{r}^2$ et $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}$ il existe une dépendance fonctionnelle de la forme

$$\boldsymbol{r}^2 = f(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}).$$

En prenant pour axe Oz le support du vecteur $\boldsymbol{a}$, on obtient

$$x^2 + y^2 = f(z),$$

c'est-à-dire l'équation d'une surface de révolution.

605. Soit

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s) + u\boldsymbol{t}(s)$$

l'équation de la surface, $\boldsymbol{r}(s)$ étant l'arête de rebroussement. On a

$$\partial_s \boldsymbol{R} = \boldsymbol{t} + uk\boldsymbol{n}, \quad d_u \boldsymbol{R} = \boldsymbol{t}.$$

Le vecteur de la normale à la surface

$$\boldsymbol{N} = \partial_s \boldsymbol{R} \times \partial_u \boldsymbol{R} = uk(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t})$$

est orienté suivant une binormale à la ligne $\boldsymbol{r}(s)$, c.q.f.d.

606. Condition nécessaire. Supposons que $\boldsymbol{a}$ est orthogonal au plan directeur. Alors $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a} = 0$. D'où $\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{a} = 0$. $\boldsymbol{e}''\cdot\boldsymbol{a} = 0$. Donc $\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}'' = 0$. Si $\boldsymbol{e}'' = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{e}'$ serait constant. Or $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}' = 0$ et $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a} = 0$. Donc $\boldsymbol{e}$ est constant et la surface dégénère en un cylindre.

Condition suffisante. Supposons que $\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}'' = 0$, $\boldsymbol{e}'' \neq \boldsymbol{o}$. Alors le vecteur $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}')/\,|\,\boldsymbol{e}'\,|$ est constant, puisque $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{o}$. Le vecteur $\boldsymbol{e}$ est orthogonal au vecteur constant $\boldsymbol{c}$, c'est-à-dire est parallèle à un plan fixe.

607. L'axe de l'hélicoïde.

608. Le plus petit parallèle de la surface.

609. La ligne donnée.

610. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \frac{k}{k^2+\varkappa^2}\boldsymbol{n}$, où k est la courbure de la ligne donnée, $\varkappa$ sa torsion.

611. Prenons la ligne de striction pour directrice de la surface gauche

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s) + u\boldsymbol{e}(s).$$

On a alors $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{e}' = 0$. Le vecteur de la normale le long de la génératrice fixe est $\boldsymbol{t}_0 \times \boldsymbol{e}_0 + u(\boldsymbol{e}_0' \times \boldsymbol{e}_0)$; donc, l'équation de la surface engendrée par les normales à la surface donnée peut être mise sous la forme

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{e}_0 + v(\boldsymbol{t}_0 \times \boldsymbol{e}_0 + u(\boldsymbol{e}_0' \times \boldsymbol{e}_0)).$$

Les vecteurs $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{t}_0 \times \boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_0' \times \boldsymbol{e}_0$ sont deux à deux orthogonaux. Choisissons un système de coordonnées rectangulaires tel que l'origine soit confondue avec le point $\boldsymbol{e}_0$ et les axes soient de même sens que les vecteurs indiqués. Les équations de la surface obtenue s'écrivent alors

$$x = u, \quad y = av, \quad z = buv,$$

ou

$$z = \frac{b}{a}xy.$$

C'est l'équation d'un paraboloïde hyperbolique de sommet r_0 situé sur la ligne de striction.

612. En mettant les équations de la ligne sous la forme paramétrique

$$x = t/(t^2 - 1), \quad y = 1/(t^2 - 1), \quad z = t,$$

on obtient

$$\Phi(t) = t^3 (t^2 - 2)/(t^2 - 1)^2.$$

613. La quantité $\Phi(t)$ est du deuxième ordre de petitesse par rapport à t et par suite le contact est d'ordre un.

615. Supposons que la ligne est définie par les équations

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}.$$

En développant les différences

$$x(t) - x(t_0), \quad y(t) - y(t_0), \quad z(t) - z(t_0)$$

en séries de Taylor et en égalant à zéro le coefficient en $(t - t_0)^3$ dans l'expression de $\Phi(t)$, on obtient

$$\begin{vmatrix} x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, la torsion de la ligne est nulle.

617. Le cylindre circulaire $x^2 + y^2 = 1$.

618. Le cylindre hyperbolique $xy + yz = 1$.

619. Le cône épointé $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$.

620. Par exemple $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, $C \neq 0$.

621. Par exemple $(x - C)^2 + y^2 + z^2 = C^2$, $C \neq 0$.

622. L'enveloppe est le cylindre $y^2 + z^2 = 1$; les caractéristiques sont les cercles $y^2 + z^2 = 1$, $x - C = 0$; il n'existe pas d'arête de rebroussement.

623. Pour les sphères dont les diamètres sont les cordes parallèles à l'axe Oy

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

L'ellipsoïde est l'enveloppe des sphères telles que $|\operatorname{tg} \varphi| \geqslant b/a$. où φ est le paramètre de l'ellipse dans les équations

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Pour les sphères dont les diamètres sont les cordes parallèles à l'axe Ox:

$$\frac{y^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2+z^2}{a^2}=1, \quad |\operatorname{tg}\varphi|\leqslant\frac{b}{a}.$$

Pour l'hyperbole $x = a \operatorname{ch} \varphi$, $y = b \operatorname{sh} \varphi$ on obtient:

a) si les cordes sont parallèles à l'axe Oy, pour $b \geqslant a$ il n'existe pas d'enveloppe, pour $b < a$ l'équation de l'enveloppe est

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Elle enveloppe les sphères telles que $|\operatorname{tg}\varphi| \leqslant b/a$;

b) si les cordes sont parallèles à l'axe Ox, l'équation de l'enveloppe pour $b \neq a$ est

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1.$$

Pour $b > a$ elle enveloppe toutes les sphères, pour $b < a$, les sphères telles que $|\operatorname{tg}\varphi| \leqslant b/a$. Si $b = a$, l'enveloppe est le plan $y = 0$ (cf. exercices 308, 309).

624. L'hélice

$$x = b\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha, \quad z = b\alpha.$$

625. $xyz=\frac{2}{9}$.

626. $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = a^2C^2/(a^2 + 1)$.

I n d i c a t i o n. Les sphères sont engendrées par la rotation des cercles du plan xOz tangents aux droites $x = \pm az$ et de centres situés sur l'axe Oz.

627. Equation de la famille:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\rho}(s))^2 = a^2.$$

En dérivant par rapport à s, on obtient

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\rho})\cdot\boldsymbol{t} = 0,$$

d'où

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\rho} = \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{n}, \quad \lambda^2 + \mu^2 = a^2.$$

En posant

$$\lambda = a\cos\alpha, \quad \mu = a\sin\alpha,$$

on obtient l'équation de la courbe caractéristique sous la forme

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho} + a(\boldsymbol{b}\cos\alpha + \boldsymbol{n}\sin\alpha).$$

628. Equation de la famille:

$$(x - b\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Equation de la courbe caractéristique

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Pour $a > b$, l'arête de rebroussement se réduit à deux points: $(0, 0, \pm\sqrt{a^2 - b^2})$, pour $a = b$, au point $(0, 0, 0)$.

629. L'enveloppe

$$[(y - R)^2 + z^2 - R^2]\,[(y + R)^2 + z^2 - R^2] = 0$$

représente deux cylindres. Il n'y a pas d'arête de rebroussement (fig. 182).

630. La courbe caractéristique est définie par le système d'équations

$$\begin{cases} (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{b}(s) = 0 \\ (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s) = 0. \end{cases}$$

Les caractéristiques sont les tangentes à la ligne donnée, l'arête de rebroussement est la ligne elle-même.

631. La courbe caractéristique est définie par le système d'équations

$$\begin{cases} (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{t}(s) = 0, \\ (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s)\, k(s) - 1 = 0. \end{cases}$$

Les caractéristiques sont parallèles aux binormales et passent par les centres de courbure de la ligne. L'arête de rebroussement

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k}\boldsymbol{n} + \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{k}\boldsymbol{b}$$

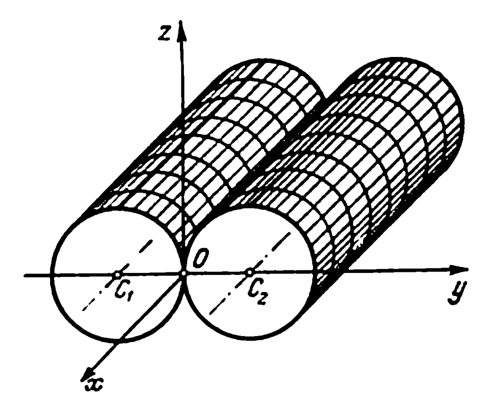


Fig. 182

est constituée des centres des sphères osculatrices à la ligne.

632. La courbe caractéristique est définie par les équations

$$\begin{cases} (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s) = 0, \\ (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot (\varkappa(s)\,\boldsymbol{b}(s) - k(s)\,\boldsymbol{t}(s)) = 0. \end{cases}$$

Les caractéristiques sont orientées suivant les vecteurs de Darboux (cf. exercice 477). Arête de rebroussement:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \frac{k\varkappa}{k\varkappa' - k'\varkappa}\boldsymbol{t} + \frac{k^2}{k\varkappa' - k'\varkappa}\boldsymbol{b}.$$

633. L'équation du cône d'axe Ox est:

$$-x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + y^2 + z^2 = 0.$$

Effectuons une rotation autour de l'axe Oy:

$$-(x \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (-x \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 + y^2 = 0,$$

ou

$$y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha - xz \sin 2\alpha = 0.$$

Faisons pivoter ce cône autour de l'axe Oz d'un angle β (β est le paramètre de la famille):

$$(-x \sin \beta + y \cos \beta)^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha - -z (x \cos \beta + y \sin \beta) \sin 2\alpha = 0. \qquad (*)$$

En dérivant l'équation (*) par rapport à β, on obtient

$$(-x \sin \beta + y \cos \beta)(x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + z \sin \alpha) = 0.$$

Le plan

$$x \cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + z \sin \alpha = 0$$

est perpendiculaire à l'axe du cône et ne possède avec ce cône qu'un point commun. En éliminant β entre l'équation

$$-x \sin \beta + y \cos \beta = 0$$

et l'équation de la famille (*), on obtient l'équation de l'enveloppe:

$$z\left(z \cos 2\alpha - \sqrt{x^2 + y^2} \sin 2\alpha\right) = 0.$$

Donc l'enveloppe est composée du plan $z = 0$ et du cône $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{cotg}^2 2\alpha = 0$.

635. Considérons une génératrice rectiligne l de la surface donnée σ. En chacun de ses points la surface σ admettra le même plan tangent π. Traçons les tangentes à toutes les lignes de la section de σ par des plans parallèles, aux points situés sur l. Il est évident que ces tangentes seront parallèles entre elles. Donc les normales à ces sections planes en tous les points de la génératrice l seront parallèles entre elles, et par suite contenues dans un même plan π^*. La surface qui contient les développées des sections planes est donc l'enveloppe des plans π^*, c'est-à-dire est une développable aussi.

636. $z = a, \quad z = -a.$

637. Prenons une ligne quelconque Γ de la surface et traçons les plans tangents à la surface en tous les points de cette ligne. On peut traiter cette surface comme l'enveloppe de ces plans, puisque par hypothèse chacun d'eux est tangent à cette surface en un point d'une ligne. D'autre part, ces plans forment une famille à un paramètre (l'arc s de la ligne Γ). Donc, l'enveloppe ne peut être qu'une développable, c'est-à-dire que les lignes de contact sont des droites.

638. Soient M_i (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les points donnés. Prenons l'équation du plan sous la forme normale:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

La distance d'un point M_i au plan est:

$$d_i = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma - p.$$

Par hypothèse:

$$\cos\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \cos\beta \sum_{i=1}^{n} y_i + \cos\gamma \sum_{i=1}^{n} z_i - np = b = \text{const}.$$

Mettons cette relation sous la forme

$$\cos\alpha \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \cos\beta \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} + \cos\gamma \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} - p = \frac{b}{n}.$$

Cette relation exprime le fait que le point de coordonnées

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$$

est équidistant de tous les plans de la famille; donc, l'enveloppe est une sphère ayant ce point pour centre.

639. $ds^2 = (f'^2 + g'^2)\, du^2 + f^2 dv^2$.

640. $ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u\, dv^2)$.

641. $ds^2 = (a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)\, du^2 + a^2 \cos^2 u\, dv^2$.

642. $ds^2 = (a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u)\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u\, dv^2$.

643. $ds^2 = (a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u)\, du^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 u\, dv^2$.

644. $ds^2 = (1 + 4u^2)\, du^2 + u^2\, dv^2$.

645. $ds^2 = du^2 + R^2\, dv^2$.

646. $ds^2 = (1 + k^2)\, du^2 + u^2 dv^2$.

647. $ds^2 = b^2\, du^2 + (a + b \cos u)^2\, dv^2$.

648. $ds^2 = \operatorname{ch}^2 (u/a)\, du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 (u/a)\, dv^2$.

649. $ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2 \sin^2 u\, dv^2$.

650. $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2$.

651. $ds^2 = [1 + f'^2 (u)]\, du^2 + 2af' (u)\, du\, dv + (a^2 + u^2)\, dv^2$.

652. a) Pour la surface $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{t}(u)$ engendrée par les tangentes à la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$

$$ds^2 = (1 + k^2 v^2)\, du^2 + 2du\, dv + dv^2,$$

où k est la courbure de la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$.

b) Pour la surface $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{n}(u)$ engendrée par les normales principales

$$ds^2 = [(1 - kv)^2 + \varkappa^2 v^2]\, du^2 + dv^2.$$

c) Pour la surface $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(u) + v\boldsymbol{b}(u)$ engendrée par les binormales

$$ds^2 = (1 + \varkappa^2 v^2)\, du^2 + dv^2,$$

où $\varkappa$ est la torsion de la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$.

653. $ds^2 = (1 + p^2)\, dx^2 + 2pq\, dx\, dy + (1 + q^2)\, dy^2$, où $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$.

654. Dans les cas a), b), d).

655.

$$E' = \frac{1}{J^2}\left[E\,(\partial_v v')^2 - 2F\partial_u v'\partial_v v' + G\,(\partial_v v')^2\right],$$

$$G' = \frac{1}{J^2}\left[E\,(\partial_u u')^2 - 2F\partial_u u'\partial_v u' + G\,(\partial_u u')^2\right],$$

$$F' = \frac{1}{J^2}\left[-E\partial_v u'\partial_v v' + F\,(\partial_u u'\partial_v v' + \partial_v u'\partial_u v') - G\partial_u u'\partial_u v'\right],$$

$$H' = \frac{H}{|J|},$$

où

$$J = \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0.$$

658. Les coordonnées curvilignes expriment les longueurs d'arc des lignes de coordonnées. Le système de coordonnées est de Tchébychev.

659. Pour la sphère $ds^2 = d\tilde{u}^2 + R^2 \cos^2(\tilde{u}/R)\, d\tilde{v}^2$.

Pour le tore: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + (a + b\cos(\tilde{u}/b))^2\, d\tilde{v}^2$.

Pour la caténoïde: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + (a^2 + \tilde{u}^2)\, d\tilde{v}^2$.

Pour la pseudo-sphère: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-2\tilde{u}/a} d\tilde{v}^2$.

I n d i c a t i o n. $\tilde{u}$ est le paramètre naturel du méridien.

660. $ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-2\tilde{u}/a} d\tilde{v}^2$. En posant $\overset{*}{u} = \tilde{v}$, $\overset{*}{v} = a e^{\tilde{u}/a}$, on obtient

$$ds^2 = \frac{a^2}{\overset{*}{v}{}^2}\,(d\overset{*}{u}{}^2 + d\overset{*}{v}{}^2).$$

661. $\cos\varphi = \dfrac{a^2 xy}{\sqrt{1+a^2x^2}\,\sqrt{1+a^2y^2}}$.

663. Prenons la première forme quadratique de la surface sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u)\, dv^2.$$

Alors

$$\cos\alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G(u)\, dv^2}},$$

d'où

$$v \operatorname{cotg}\alpha = \pm \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

664. Si l'on prend la première forme quadratique de la sphère

$$ds^2 = du^2 + R^2 \cos^2 (u/R)\, dv^2,$$

on obtient

$$v \operatorname{cotg} \alpha = \pm \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R} \right).$$

666. En écrivant l'équation du cône sous la forme $r = ve(u)$, $|e(u)| = 1$, on obtient

$$\operatorname{tg} \alpha \ln v = \int |e'(u)|\, du + C.$$

667. Si l'équation de la surface est de la forme indiquée dans l'exercice 652, alors $u + v = \text{const.}$

668. Si la première forme quadratique de la surface S est

$$ds^2 = (1 + k^2v^2)\, du^2 + 2du\, dv + dv^2,$$

on obtient alors

$$(\sin^2 \alpha - k^2v^2 \cos^2 \alpha)\, du^2 + 2 \sin^2 \alpha\, du\, dv + \sin^2 \alpha\, dv^2 = 0.$$

669. $(E\, \partial_v\varphi - F\, \partial_u\varphi)\, du + (F\partial_v\varphi - G\partial_u\varphi)\, dv = 0.$

670. $v - \operatorname{tg} u = \text{const.}$

671. $u^2 + u + 1 = C_1e^{-v}$ $(C_1 = \text{const}).$

672. $v = \dfrac{1}{2u^2} + \lambda.$

673. $X = \dfrac{U-V}{2} \cos V, \quad Y = \dfrac{U-V}{2} \sin V, \quad Z = \dfrac{U+V}{2},$

où $U = 2u + v$, $V = v$.

674. $ER - FQ + GP = 0.$

676. $(1 + a^2x^2)\, y^2 = C_1, \; (1 + a^2y^2)\, x^2 = C_2.$

678. $\ln (u + \sqrt{u^2 + a^2}) \pm v = \text{const.}$

679. $u \pm \ln \operatorname{tg} (v/2) = \text{const.}$

680. $\begin{cases} ay + \sqrt{1 + a^2y^2} = C\,(ax + \sqrt{1 + a^2x^2}), \\ z = axy \end{cases}$

et

$$\begin{cases} ay + \sqrt{1 + a^2y^2} = \dfrac{C_1}{\sqrt{1 + a^2x^2} + ax}, \\ z = axy. \end{cases}$$

681. a) $ds^2 = (8u^2 + v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (8v^2 + u^2)\, dv^2$;

b) $ds = 2\sqrt{2v^2 + 1}\, dv, \quad ds = \sqrt{8u^2 + 1}\, du,$

$ds = 2\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}\, u\, du$;

c) $s = 3\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}.$

682. $\cos \alpha = \pm (1 - a^2)/(1 + a^2).$

683. $p=\frac{10}{3}a$; $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

684. $s=|\operatorname{sh}u_2-\operatorname{sh}u_1|$. 685. $\cos\alpha=-3/5$.

686. $\cos\alpha=2/3$. 687. $s=\sqrt{2}\,|u_2-u_1|$.

688. $ds^2=a^2\operatorname{cotg}^2u\,du^2+a^2\sin^2u\frac{du^2}{\sin^2u}=\frac{a^2\,du^2}{\sin^2u}$,

$$s=a\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sin u}\right|=a\left|\ln\operatorname{tg}\frac{u_2}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\right|=a\,|v_2-v_1|.$$

Considérons la famille

$$v=a\ln\operatorname{tg}(u/2)+C.$$

Le point $M_1(u_1, v_1)$ appartient à la ligne

$$v=-a\ln\operatorname{tg}(u/2)+C_1,$$

le point $M_2(u_2, v_2)$, à la ligne

$$v=-a\ln\operatorname{tg}(u/2)+C_2,$$

c'est-à-dire que

$$v_1=-a\ln\operatorname{tg}(u_1/2)+C_1,\quad v_1=a\ln\operatorname{tg}(u_1/2)+C,$$
$$v_2=-a\ln\operatorname{tg}(u_2/2)+C_2,\quad v_2=a\ln\operatorname{tg}(u_2/2)+C;$$

donc

$$v_1=\frac{C_1+C}{2},\quad v_2=\frac{C_2+C}{2};$$

par suite

$$s=a\,|v_2-v_1|=\frac{a\,|C_2-C_1|}{2},$$

c'est-à-dire ne dépend pas de C.

689. a) Prenons les équations de la sphère sous la forme

$$x=R\cos u\cos v,\ y=R\cos u\sin v,\quad z=R\sin u.$$

Plaçons un côté de l'angle droit sur la ligne $u=0$, l'autre côté sur la ligne $v=\alpha$, un sommet au point B ($u=0$, $v=0$), l'autre sommet au point A ($u=\beta$, $v=\alpha$) (fig. 193). Les longueurs des côtés de l'angle droit sont respectivement égales à $a=R\alpha$, $b=R\beta$. Pour calculer c, il faut trouver la longueur d'arc de la ligne

$$Ay+Bz=0$$

(sur la sphère) compris entre les points indiqués. L'équation de l'hypoténuse en coordonnées curvilignes est: $A\cos u\sin v+B\sin u=0$. Comme elle passe par le point ($u=\beta$, $v=\alpha$), on a

$$\sin v=k\operatorname{tg}u,$$

où

$$k = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

$$c = s = R\sqrt{1+k^2}\int_0^\beta \frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-(1+k^2)\sin^2 u}} =$$

$$= R\arcsin\left(\sqrt{1+k^2}\sin\beta\right) = R\arcsin\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta};$$

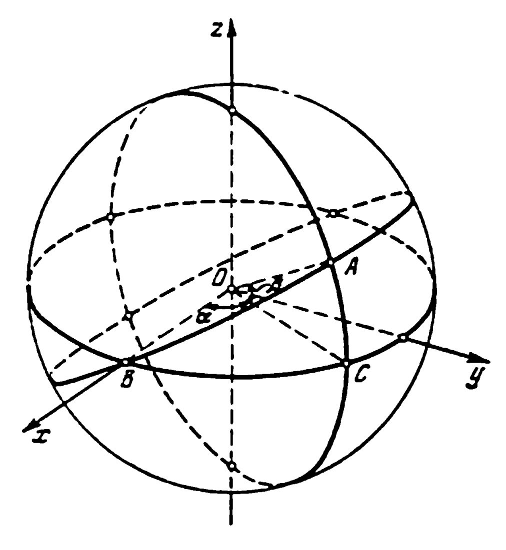


Fig. 183

d'où

$$\cos(c/R) = \cos\alpha\cos\beta = \cos(a/R)\cos(b/R).$$

b) $S = R^2\iint_D \cos u\,du\,dv = R^2\int_0^\alpha dv\int_0^{f(v)}\cos u\,du,$

où

$$f(v) = \operatorname{arctg}\frac{\sin v}{k},$$

$$S = R^2\int_0^\alpha \sin\operatorname{arctg}\frac{\sin v}{k}\,dv =$$

$$= R^2\int_0^\alpha \frac{\sin v\,dv}{\sqrt{(1+k^2)-\cos^2 v}} = R^2\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \arcsin\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

D'où

$$\sin\frac{S}{R^2} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha+k^2}-k\cos\alpha}{1+k^2} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos\gamma} = \frac{\sin(a/R)\sin(c/R)}{1+\cos(c/R)}.$$

En utilisant la relation

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma},$$

on obtient

$$\sin B = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

$$\cos (A + B) = -\frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 + \cos \gamma},$$

$$\sin \left(A + B - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 + \cos \gamma}.$$

En définitive,

$$S = R^2 \left(A + B - \frac{\pi}{2}\right).$$

690. $S = \frac{a^2}{2} [\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})]$.

691. $S = a^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln (1 + \sqrt{2})\right]$.

692. $S = 2a^2 (\pi - 2)$, où a est le rayon de la sphère.

693. $S = 2\varphi_0 R^2$, où R est le rayon de la sphère.

695. I n d i c a t i o n. Prendre l'équation de la surface conique de la forme $\boldsymbol{r} = v\boldsymbol{e}(u)$, où $|\boldsymbol{e}(u)| = 1$, et comparer sa première forme quadratique avec celle du plan en coordonnées polaires.

696. Comme indiqué dans l'exercice 652, la première forme quadratique d'une telle surface peut s'écrire

$$ds^2 = [1 + v^2 k^2 (u)]\, du^2 + 2\, du\, dv + dv^2,$$

où $k(u)$ est la courbure de la ligne l.

Déformons la ligne l sans l'allonger de telle sorte que la courbure ne change pas en chacun de ses points. Vu que la torsion ne figure pas dans l'expression de ds^2, la déformation de la surface engendrée par les tangentes à la ligne l sera une application de la surface donnée sur la surface déformée. En transformant la ligne l en une ligne plane, on applique par là même la surface engendrée par les tangentes sur un plan.

697. La première forme quadratique de l'hélicoïde normale

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = av$$

est

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

Supposons que la caténoïde s'obtient par rotation de la chaînette

$$x = a \operatorname{ch} (z/a), \quad y = 0$$

autour de l'axe Oz. Les équations paramétriques de la chaînette peuvent se mettre sous la forme

$$x=\sqrt{u^2+a^2}, \quad y=0, \quad z=a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a},$$

ce dont on s'assure par une vérification immédiate. Les équations

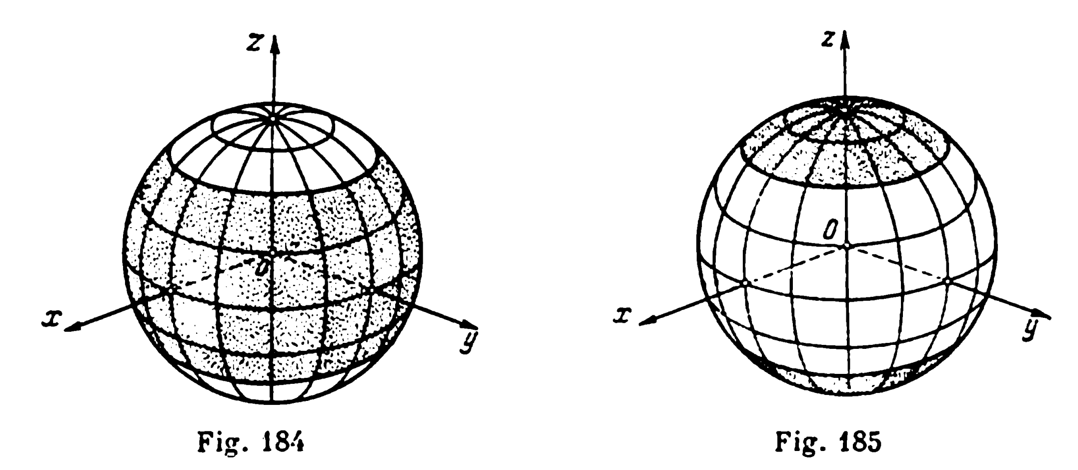


Fig. 184 Fig. 185

paramétriques de la caténoïde s'écrivent alors

$$x=\sqrt{u^2+a^2}\cos v,$$
$$y=\sqrt{u^2+a^2}\sin v,$$
$$z=a\ln\frac{u+\sqrt{u^2+a^2}}{a}$$

en calculant maintenant la première forme quadratique de la caténoïde, on obtient (*).

701. 702. Une sphère.

703. Une demi-sphère sans le cercle frontière.

704. Un segment de sphère privé des cercles frontières (fig. 184).

705. Deux calottes sphériques sans frontières (fig. 185).

706. Un grand cercle.

707. Un demi grand cercle sans les extrémités.

708. Deux arcs symétriques de grand cercle.

709. Deux parallèles (si la normale est dirigée vers l'extérieur du cône).

710. Une sphère privée de deux points diamétralement opposés.

711. Une sphère privée d'un grand cercle.

712. Une sphère prise deux fois; si l'axe du tore est vertical, le plus haut et le plus bas parallèles du tore se transforment en les pôles d'une sphère.

713. Un quart de grand cercle sans une extrémité, pris deux fois.

714. Une demi-sphère sans pôle prise une infinité de fois.

716. $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}[(f'g''-f''g')\,du^2+fg'\,dv^2]$.

717. $\varphi_2 = R\,(du^2+\cos^2 u\,dv^2)$.

718. $\varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u}}(du^2+\cos^2 u\,dv^2)$.

719. $\varphi_2 = \frac{-ac}{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 u+c^2\operatorname{ch}^2 u}}(du^2-\operatorname{ch}^2 u\,dv^2)$.

720. $\varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2 u+c^2\operatorname{sh}^2 u}}(du^2+\operatorname{sh}^2 u\,dv^2)$.

721. $\varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}(du^2+u^2\,dv^2)$.

722. $\varphi_2 = R\,dv^2$.

723. $\varphi_2 = \frac{ku}{\sqrt{1+k^2}}\,dv^2$.

724. $\varphi_2 = b\,du^2+\cos u\,(a+b\cos u)\,dv^2$.

725. $\varphi_2 = -\frac{1}{a}(du^2-a^2\,dv^2)$.

726. $\varphi_2 = -a\operatorname{cotg} u\,(du^2-\sin^2 u\,dv^2)$.

727. $\varphi_2 = -\frac{2a\,du\,dv}{\sqrt{u^2+a^2}}$.

729. $\varphi_2 = \frac{\partial_{xx}f\,dx^2+2\partial_{xy}f\,dx\,dy+\partial_{yy}f\,dy^2}{\sqrt{1+(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2}}$.

Par hypothèse

$$\partial_{xx}f = 0, \quad \partial_{xy}f = 0, \quad \partial_{yy}f = 0.$$

La solution générale de ce système est:

$$f = ax + by + c.$$

730. $\varphi_2 = -\frac{a}{u^2+a^2}\,du^2+a\,dv^2$,

$k_n|_{v=\text{const}} = -a/(u^2+a^2)$, $k_n|_{u=\text{const}} = a/(u^2+a^2)$.

731. Si l'on prend l'équation de la surface de la forme indiquée dans l'exercice 554, alors

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = \varkappa/vk,$$

où k et $\varkappa$ sont la courbure et la torsion de la ligne donnée.

732. $k_1 = a/b^2$, $k_2 = a/c^2$.

733. $\frac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2+a^2}$; $k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2+a^2}$.

735. $k_1 = \sqrt{3}/9$, $k_2 = -\sqrt{3}/3$.

736. $k_1 = 1/p$, $k_2 = 1/q$.

738. a) $k_n = \frac{-du^2}{\sqrt{1+u^2}\,[(1+u^2)\,du^2+dv^2]}$, où $u=x$, $v=z$;

b) $k_n = -1/(1+u^2)^{3/2}$;

c) $k_n = -1/21\sqrt{5}$.

739. a) $k_1 = 1/2\sqrt{5}$, $k_2 = 0$;

b) $x-2=0$, $z-1=0$; $\frac{x-2}{4}=\frac{z-1}{2}$, $y=0$;

c) $k = 2/9\sqrt{5}$.

740. a) $4x^2 + 9y^2 = 1$;

b) $R = 2/13$.

741. Indication. Ecrire la formule d'Euler sous la forme

$$\frac{1}{r_i} = \frac{R_1+R_2}{2R_1R_2} - \frac{R_1-R_2}{2R_1R_2}\cos 2\left(\varphi + \frac{i-1}{n}\pi\right),$$

où $1/R_1$, $1/R_2$ sont les courbures principales, $i = 1, 2, \ldots, n$.

742. Une sphère.

744. Des développables.

746. 1) Pour la surface engendrée par la révolution de la ligne $x = f(u)$, $y = 0$, $z = g(u)$ autour de l'axe Oz

$$K = \frac{g'(f'g''-f''g')}{f(f'^2+g'^2)^2}.$$

2) Pour la sphère $K = 1/R^2$.

3) Pour l'ellipsoïde de révolution

$$K = -\frac{c^2}{(a^2\cos^2 u + c^2\sin^2 u)^2}.$$

4) Pour l'hyperboloïde de révolution à une nappe

$$K = -\frac{c^2}{(a^2\,\mathrm{sh}^2\,u + c^2\,\mathrm{ch}^2\,u)^2}.$$

5) Pour l'hyperboloïde de révolution à deux nappes

$$K = \frac{c^2}{(a^2\,\mathrm{ch}^2\,u + c^2\,\mathrm{sh}^2\,u)^2}.$$

6) Pour le paraboloïde de révolution

$$K = \frac{4}{(1+4u^2)^2}.$$

7) Pour le cylindre circulaire

$$K = 0.$$

8) Pour le cône circulaire

$$K = 0.$$

9) Pour le tore

$$K = \frac{\cos u}{b(a+b\cos u)}.$$

10) Pour la caténoïde

$$K = -\frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^4 (u/a)}.$$

11) Pour la pseudo-sphère

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

747. L'un des principaux rayons de courbure de la surface est égal au rayon de courbure de la parabole $y^2 = 2px$:

$$R_1^2 = p^2 \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^3.$$

Le deuxième rayon de courbure principal est égal au segment de normale de la parabole limité par la directrice:

$$R_2^2 = \frac{p^2}{4} \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^2.$$

Donc $|R_1| = 2 | R_2 |$.

748. $K = -\frac{1}{A^2} (\partial_{uu} \ln A + \partial_{vv} \ln A)$ (voir exercice 660).

749. $K = -\frac{\partial_{uu} \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. **750.** $K = -1$.

751. $K^{-1} = pq \left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2$.

753.

$$K = \frac{-1}{(\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2 + (\partial_z F)^2} \begin{vmatrix} \partial_{xx} F & \partial_{xy} F & \partial_{xz} F & \partial_x F \\ \partial_{yx} F & \partial_{yy} F & \partial_{yz} F & \partial_y F \\ \partial_{zx} F & \partial_{zy} F & \partial_{zz} F & \partial_z F \\ \partial_x F & \partial_y F & \partial_z F & 0 \end{vmatrix}.$$

754. $K = 4c$.

755. Si la surface engendrée par les normales principales est définie par l'équation

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{n}(s),$$

alors

$$K = -\frac{\varkappa^2}{[(1 - vk)^2 + v^2\varkappa^2]^2},$$

où k et $\varkappa$ sont la courbure et la torsion de la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.

Si la surface engendrée par les binormales est définie par

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}(s) + v\boldsymbol{b}(s),$$

alors

$$K = -\frac{\varkappa^2}{(1 + v^2\varkappa^2)^2},$$

où $\varkappa$ est la torsion de la ligne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.

756. $H = 0$, $K = -a^2/(a^2 + u^2)^2$. La courbure totale est constante sur les hélices.

757. $K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$, $H = \frac{(1 + p^2)\, t + (1 + q^2)\, r - 2pqs}{2\,(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$, où $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$, $r = \partial_{xx} z$, $s = \partial_{xy} z$, $t = \partial_{yy} z$.

758.

$$K = \frac{f' f''}{\rho\,(1 + f'^2)^2}, \quad H = \frac{f''}{2\,(1 + f'^2)^{3/2}} + \frac{f'}{2\rho \sqrt{1 + f'^2}}.$$

759. $H = -1/2a$.

761. Si l'axe du tore est vertical, le plus haut et le plus bas parallèles sont constitués de points paraboliques; ces parallèles séparent

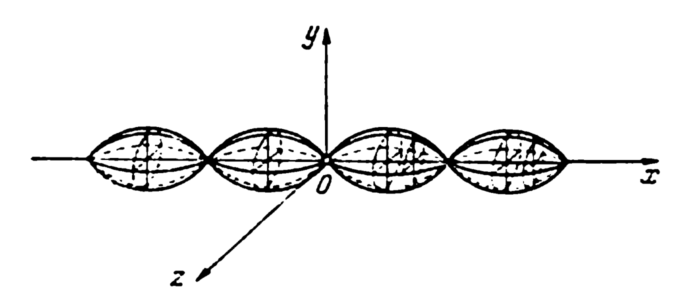


Fig. 186

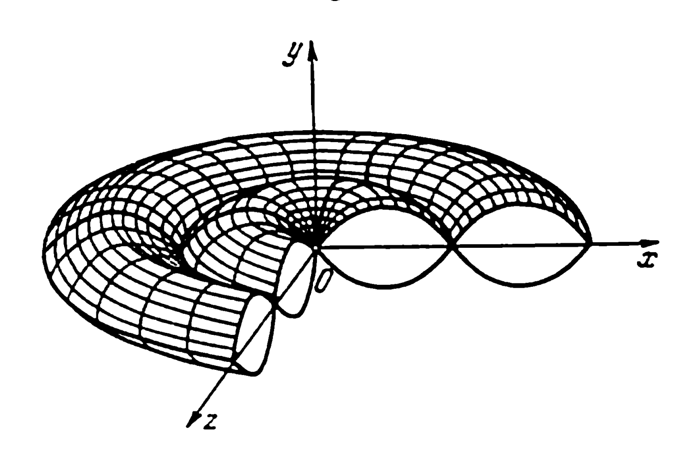


Fig. 187

la partie extérieure du tore, qui est composée de points elliptiques, de la partie intérieure formée de points hyperboliques.

762. Tous les points de la surface sont elliptiques (fig. 186).

763. Les sommets de la sinusoïde décrivent des lignes composées de points paraboliques; les points d'inflexion de la sinusoïde décrivent des lignes n'appartenant pas à la surface. Ces deux familles de lignes partagent la surface en anneaux dont la courbure totale est de même signe; les anneaux contigus (en haut ou en bas) possèdent des courbures de signe différent (fig. 187).

764. Le point $x = 1$, $y = z = 0$ est un point singulier qui partage la surface en deux parties: pour $x > 1$ les points de la surface sont elliptiques, pour $x < 1$, hyperboliques (fig. 188).

765. Tous les points de la surface sont hyperboliques (fig. 189).

766. Si le produit $AB \geqslant 0$, tous les points de la surface sont hyperboliques (fig. 190); si $AB < 0$, la surface peut contenir des points de trois types (fig. 191).

767. Elliptiques. **768.** Hyperboliques.

769, 770. Elliptiques.

771. Hyperboliques.

772-775. Paraboliques.

776. Si $f'f'' < 0$, les points sont elliptiques; si $f'f'' > 0$, hyperboliques; si $f'f'' = 0$, paraboliques.

779. La condition nécessaire est évidente. Prouvons la condition suffisante. Soient

$$L = \lambda E, \quad M = \lambda F, \quad N = \lambda G.$$

Portons les valeurs des coefficients des formes quadratiques:

$$-\partial_u \boldsymbol{m} \cdot \partial_u \boldsymbol{r} = \lambda \partial_u \boldsymbol{r}^2, \quad -\partial_u \boldsymbol{m} \cdot \partial_v \boldsymbol{r} = \lambda \partial_u \boldsymbol{r} \cdot \partial_v \boldsymbol{r},$$

ou

$$(\boldsymbol{m}_u + \lambda \boldsymbol{r}_u) \cdot \boldsymbol{r}_u = 0, \quad (\boldsymbol{m}_u + \lambda \boldsymbol{r}_u) \cdot \boldsymbol{r}_v = 0.$$

En ajoutant l'égalité

$$(\boldsymbol{m}_u + \lambda \boldsymbol{r}_u) \cdot \boldsymbol{m} = 0,$$

on obtient

$$\boldsymbol{m}_u + \lambda \boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{0}.$$

On montre de façon analogue la nullité du vecteur $\boldsymbol{m}_v + \lambda \boldsymbol{r}_v$. Donc:

$$\boldsymbol{m}_u = -\lambda \boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{m}_v = -\lambda \boldsymbol{r}_v. \qquad (*)$$

En dérivant la première équation par rapport à v et la seconde par rapport à u, on trouve

$$\boldsymbol{m}_{uv} = -\lambda_v \boldsymbol{r}_u - \lambda \boldsymbol{r}_{uv}, \quad \boldsymbol{m}_{vu} = -\lambda_u \boldsymbol{r}_v - \lambda \boldsymbol{r}_{vu},$$

d'où

$$\lambda_v \boldsymbol{r}_u - \lambda_u \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{0}.$$

Si l'une au moins des quantités λ_u, λ_v était différente de zéro, les vecteurs $\boldsymbol{r}_u$ et $\boldsymbol{r}_v$ seraient colinéaires, ce qui est impossible. Si l'on exclut ce cas, on obtient $\lambda = \text{const.}$ L'intégration des équations (*) nous donne:

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{m}}{\lambda} + \boldsymbol{r}_0 \text{ ou } (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

c'est-à-dire une sphère.

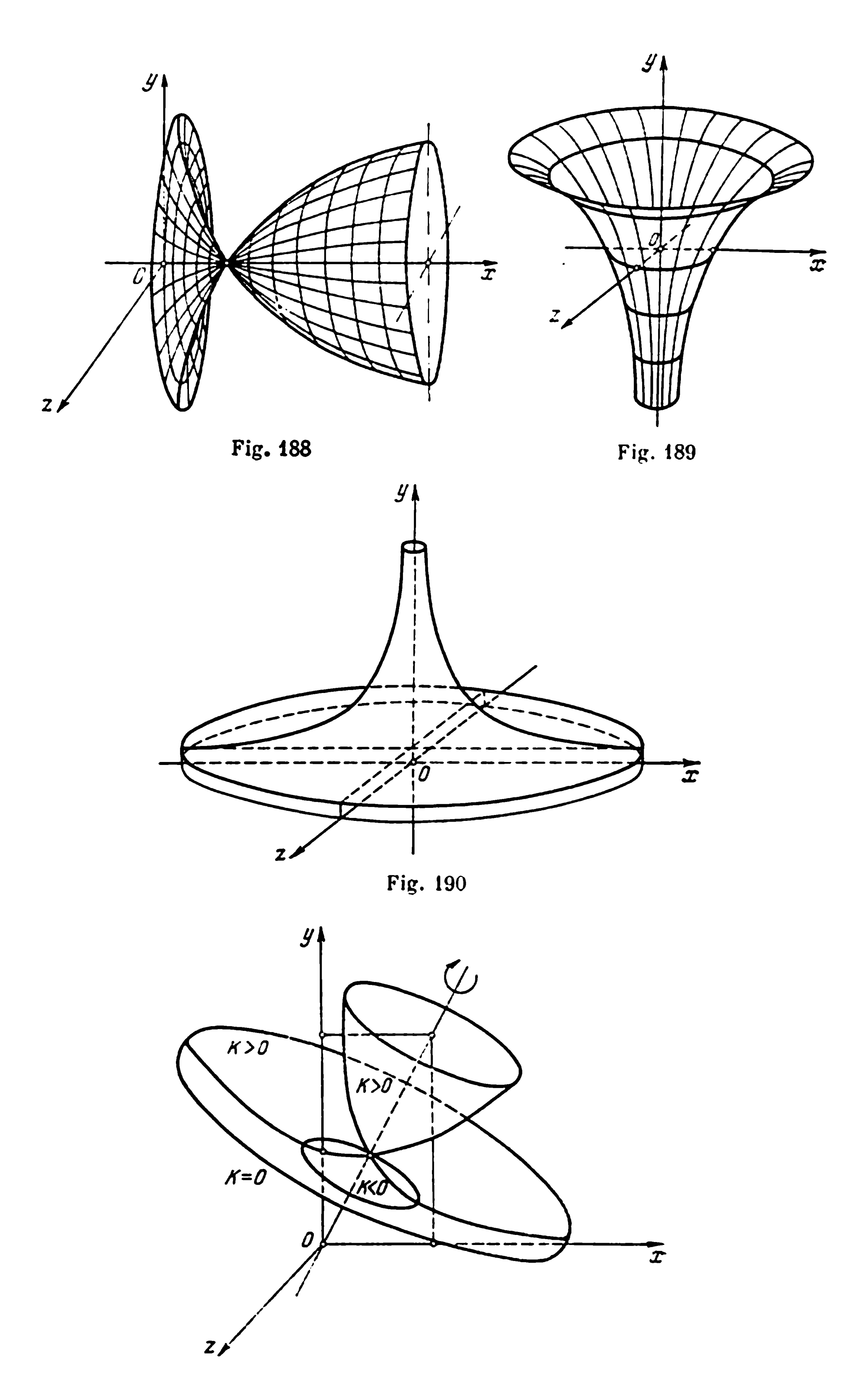


Fig. 188

Fig. 189

Fig. 190

Fig. 191

780. Construisons la développée d'un méridien quelconque et déterminons ses points de concours P_1, P_2, ... avec l'axe de rotation. Soient M_1, M_2, ... les points correspondants de la développante (du méridien). Alors les parallèles passant par ces points sont constitués de points ombilicaux.

781. Les parallèles décrits par les sommets de la sinusoïde et eux seuls (cf. exercices **780** et **389**).

782. Les deux points d'intersection de l'ellipsoïde avec l'axe de rotation.

783. Le sommet du paraboloïde.

784. Le paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p>q>0,$$

possède deux points ombilicaux:

$$A_{1,2}(0, \pm\sqrt{pq-q^2}, \quad (p-q)/2).$$

785. L'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>b>c>0,$$

possède quatre points ombilicaux:

$$A_{1-4}\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right).$$

786. L'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad a>b>0,$$

possède quatre points ombilicaux

$$A_{1-4}\left(0, \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}, \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right).$$

789. Exemple, la surface engendrée par la révolution de la parabole $y = x^4$ autour de l'axe Oy.

790. Exemple, l'axe Oz du cylindre $y=x^4$ est composé de points méplats.

791. Se servir de l'exercice **729**.

792. $M\,du + N\,dv = 0$, $L\,du + M\,dv = 0$.

793. $LR - MQ + NP = 0$.

795. $\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v}-M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du+\left(M\frac{\partial\varphi}{\partial v}-N\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv=0.$

797. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=C_1.$

798. $b\,(1, 0, -1)$.

799. $(LB - MA)\,du + (MB - NA)\,dv = 0.$

801. $v = \operatorname{arctg} u + C$.

804. En prenant les équations de la pseudo-sphère de la forme
$x = a \sin u \cos v,\ y = a \sin u \sin v,\ z = a \ln \operatorname{tg}(u/2) + a \cos u$,
on obtient

$$\ln \operatorname{tg}(u/2) \pm v = C.$$

Si l'on introduit les nouveaux paramètres

$$u' = \ln \operatorname{tg}(u/2) + v,$$
$$v' = \ln \operatorname{tg}(u/2) - v,$$

le réseau de coordonnées sera asymptotique, et les coefficients de la première forme quadratique vérifieront les conditions de l'exercice 657.

806. Si l'on part des équations

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = \varphi(u)$$

de la surface de révolution, on obtient

$$(f'\varphi'' - f''\varphi')\, du^2 + f\varphi' dv^2 = 0.$$

807. $u \pm v = \text{const}$.

808. Si l'on prend l'équation du tore de la forme

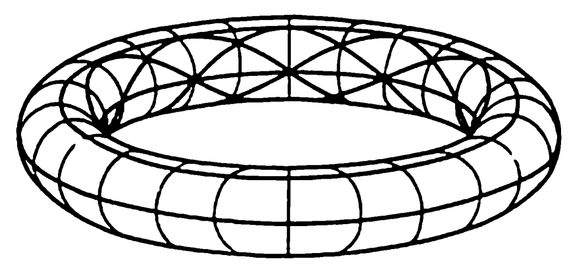


Fig. 192

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u,$$

alors l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$b\, du^2 + \cos u\, (a + b \cos u)\, dv^2 = 0.$$

Cette équation admet la solution générale

$$v + C = \pm \int \frac{\sqrt{b}\, du}{\sqrt{-\cos u\, (a + b \cos u)}}$$

pour $\pi/2 < u < 3\pi/2$.

Les lignes $u = \pi/2$, $u = 3\pi/2$ sont, de toute évidence, solutions de l'équation différentielle (des solutions singulières). Elles enveloppent les familles de lignes asymptotiques situées sur la partie intérieure de la surface du tore (fig. 192).

809. Les génératrices rectilignes et les trajectoires qui leur sont orthogonales, c'est-à-dire les hélices.

810. Les génératrices rectilignes.

811. L'équation de la surface est de la forme: $x^3z - y^3 = 0$. L'équation différentielle des lignes asymptotiques est:

$$2y^2\, dx^2 - 3xy\, dx\, dy + x^2\, dy^2 = 0,$$

ou

$$(x\, dy - y\, dx)\,(2y\, dx - x\, dy) = 0.$$

Il existe donc deux familles de lignes asymptotiques:

1) $y = c_1 x, \qquad z = c_1^3;$
2) $y = c_2 x^2, \qquad z = c_2^3 x^3.$

814. Si $k_1 + k_2 = 0$, alors de la formule d'Euler il s'ensuit que

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0,$$

où φ est l'angle formé par les directions asymptotique et principale. Il résulte que $\varphi = \pm\pi/4$, c'est-à-dire que l'angle des directions asymptotiques est égal à $\pi/2$.

817. Prenons pour système de coordonnées le système de lignes asymptotiques de la surface donnée. Alors $L = 0$, $N = 0$. Pour que le système correspondant de la surface parallèle soit composé de lignes asymptotiques, il faut que $L^* = 0$, $N^* = 0$. Comme

$$L^* = aKE + (1 - 2aH)\, L,$$
$$N^* = aKG + (1 - 2aH)\, N,$$

les coefficients L^* et N^* ne sont pas nuls pour $K \neq 0$, c.q.f.d.

820. Les génératrices rectilignes et les trajectoires qui leur sont orthogonales et qui sont des sections planes.

821. Les génératrices rectilignes et les lignes d'intersection des sphères de rayon arbitraire et de centre le sommet de la surface conique avec la surface conique.

822. Les parallèles et les méridiens.

823. Les lignes de coordonnées.

824. Les génératrices rectilignes et les trajectoires qui leur sont orthogonales.

825. Si l'équation de l'hélicoïde est de la forme:

$$x = u\cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

alors l'équation différentielle des lignes de courbure est:

$$(a^2 + u^2)\, dv^2 - du^2 = 0,$$

d'où

$$v = \pm \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c.$$

826.
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{qC} = \dfrac{q-p}{1+C} \quad (C \neq 0), \end{cases}$$

ainsi que les sections du paraboloïde elliptique par les plans $x = 0$ et $y = 0$.

831. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s) + R_1 \boldsymbol{m}(s)$, où $k_1 = 1/R_1$ est la courbure principale le long de la ligne donnée. Donc, l'enveloppe des normales à la surface le long d'une ligne de courbure est composée des centres de courbure principale. Le plan osculateur est confondu avec le plan de section normale de la ligne de courbure au point correspondant.

834. Prenons pour système de coordonnées le système orthogonal de la surface. Alors $F = 0$. Pour le réseau orthogonal correspondant de la surface parallèle on doit avoir $F^* = 0$. Prenons les équations des surfaces considérées de la forme

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \text{ et } \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) + a\boldsymbol{m}(u, v).$$

Alors

$$F^* = 2a(aH - 1) M,$$

d'où il résulte que $F^* = 0$ dans deux cas: a) $M = 0$; le système orthogonal est alors constitué des lignes de courbure; b) $a = 1/H$; la surface admet une courbure moyenne constante et à tout système orthogonal sera associé un système orthogonal.

835. Ceci n'est possible que pour l'ellipsoïde de révolution.

845. Supposons que les génératrices rectilignes sont parallèles à l'axe Oz. On peut alors prendre l'équation de la surface de la forme

$$\boldsymbol{r} = f(u)\boldsymbol{i} + \varphi(u)\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k},$$

où u est le paramètre intrinsèque de la ligne directrice. On cherchera l'équation de la géodésique sous la forme

$$v = v(u). \qquad (*)$$

Alors

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \varphi'\boldsymbol{i} - f'\boldsymbol{j},$$

$$d\boldsymbol{r} = (f'\boldsymbol{i} + \varphi'\boldsymbol{j} + v'\boldsymbol{k})\, du,$$

$$d^2\boldsymbol{r} = (f''\boldsymbol{i} + \varphi''\boldsymbol{j} + v''\boldsymbol{k})\, du^2$$

et l'équation pour la détermination des géodésiques sera

$$\begin{vmatrix} \varphi' & -f' & 0 \\ f' & \varphi' & v' \\ f'' & \varphi'' & v'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\varphi'^2 + f'^2)\, v'' - (\varphi'\varphi'' + f'f'')\, v' = 0.$$

Or $\varphi'^2 + f'^2 = 1$; donc

$$\varphi'\varphi'' + f'f'' = \frac{1}{2}(\varphi'^2 + f'^2)' = 0.$$

Par suite $v'' = 0$, d'où $v = c_1u + c_2$. L'équation vectorielle de la famille des géodésiques sera

$$r = f(u)\, i + \varphi(u)\, j + (c_1u + c_2)\, k,$$

d'où

$$\cos\theta = \cos(\widehat{\dot{r}_u, OZ}) = \frac{\frac{dr}{du}\cdot k}{\left|\frac{dr}{du}\right|} = \frac{c_1}{\sqrt{f'^2+\varphi'^2+c_1^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}.$$

Donc, les géodésiques trouvées sont des hélices généralisées.

Par ailleurs, les génératrices rectilignes sont aussi des géodésiques. Elles ne figurent pas dans la solution générale, car leurs équations ne peuvent pas être mises sous la forme (*).

Comme par tout point de la surface cylindrique il passe dans n'importe quelle direction ou bien une hélice généralisée, ou bien une génératrice rectiligne, chacune de ces lignes est une géodésique.

848. Les grands cercles de cette sphère.

852. Voir les exercices **477**, **632**, **851**.

856. $k_g = \dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{Rr}$.

857. $k_g = \dfrac{|u|}{u^2+a^2}$.

858. $k_g\,|_{u=c} = \dfrac{|u|}{u^2+f'^2(v)}$, $\quad k_g\,|_{v=c} = 0$.

863. Prenons les équations de l'hélicoïde normal de la forme

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av.$$

On remarquera tout d'abord que les génératrices rectilignes, c'est-à-dire les lignes v = const, sont des géodésiques. En admettant maintenant que $dv \neq 0$, on obtient l'équation différentielle des lignes géodésiques

$$\frac{d^2u}{dv^2} - \frac{2u}{a^2+u^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - u = 0.$$

Pour intégrer cette équation on admettra que u est une variable indépendante et que $p = \dfrac{du}{dv}$ est une fonction de u. L'équation devient alors

$$p\frac{dp}{du} - \frac{2u}{a^2+u^2}p^2 - u = 0.$$

En posant $z = p^2$, on obtient

$$\frac{dz}{du} - \frac{4u}{a^2+u^2}z - 2u = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$z=(a^2+u^2)^2\left(C_1-\frac{1}{a^2+u^2}\right),$$

d'où

$$v=\int\frac{du}{(a^2+u^2)\sqrt{C_1-\frac{1}{a^2+u^2}}}+C_2.$$

864. Prenons la première forme quadratique de la pseudo-sphère de la forme

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

(cf. exercice 660). Les équations différentielles des géodésiques seront alors

$$\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{2}{y}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}=0.$$

Les lignes x = const sont solutions de ce système.

Si $x\neq$ const, on peut remplacer ce système par l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{y}=0,$$

dont la solution générale est

$$(x-C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

865. Indication. En considérant le long d'une géodésique v comme une fonction de u, on obtient l'équation différentielle des géodésiques de la surface de Liouville

$$2(f+\varphi)\frac{d^2v}{du^2}=-\frac{df}{du}\left(\frac{dv}{du}\right)^3+\frac{d\varphi}{d}\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\frac{df}{du}\frac{dv}{du}+\frac{d\varphi}{dv},$$

ou

$$(f+\varphi)\,du^2\,d\,(dv^2)=(du^2+dv^2)\,(d\varphi\,du^2-df\,dv^2),$$

d'où

$$d\left(\frac{\varphi\,du^2-f\,dv^2}{du^2+dv^2}\right)=0.$$

En intégrant cette relation, on obtient les équations cherchées.

866. Indication. Vérifier tout d'abord que

$$\rho\cos\mu=\boldsymbol{ert},$$

où $\boldsymbol{e}$ est le vecteur unitaire de l'axe de rotation; $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur du point courant de la géodésique d'origine O sur l'axe de rotation; $\boldsymbol{t}$ le vecteur unitaire de la tangente à la géodésique. Vérifier ensuite

que la différentielle du produit mixte obtenu est nulle. La réciproque est fausse, puisque cette relation est réalisée sur tout parallèle, mais tout parallèle n'est pas une géodésique.

867. Soient r_0 le rayon du plus grand parallèle L de l'ellipsoïde de révolution, M_0 un point de ce parallèle. Considérons la géodésique passant par M_0 et faisant un angle $\mu_0 = 0$ avec le parallèle L. D'après le théorème de Clairaut, le long de cette géodésique

$$\rho \cos \mu = r_0;$$

d'où

$$\rho = r_0, \quad \cos \mu = 1.$$

Donc, $\mu = 0$ et la géodésique est confondue avec le parallèle L.

Considérons maintenant la géodésique qui coupe le parallèle sous un angle droit, c'est-à-dire que $\mu_0 = \pi/2$. D'après le théorème de Clairaut $\rho \cos \mu = 0$; donc, $\mu = \pi/2$ et la géodésique est confondue avec un méridien.

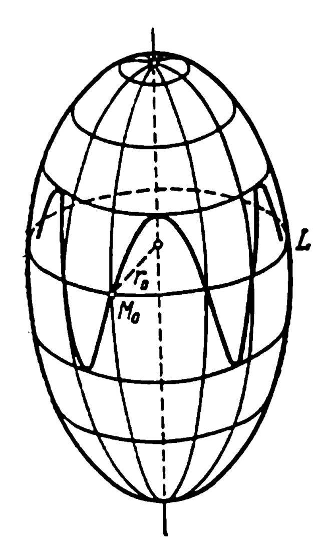
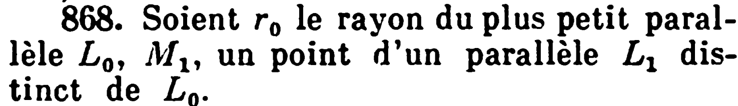


Fig. 193

Supposons maintenant que $0 < \mu_0 < \pi/2$. En posant $r_0 \cos \mu_0 = C_0$, on a $\rho \cos \mu = C_0$ le long de la géodésique. Il s'ensuit qu'elle coupe tous les parallèles de l'ellipsoïde de rayons $\rho < C_0$ sous un angle non nul, ensuite touche les parallèles de rayon $\rho = C_0$ et s'éloigne en direction du parallèle L (fig. 193).



868. Soient r_0 le rayon du plus petit parallèle L_0, M_1, un point d'un parallèle L_1 distinct de L_0.

Il est évident que pour les géodésiques passant par le point M_1, la constante C du théorème de Clairaut prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, r_1]$, où r_1 est le rayon du parallèle L_1. Si $C < r_0$, la géodésique coupe tous les parallèles de la surface sous un angle non nul.

Pour $C \geqslant r_0$ la géodésique est entièrement contenue dans la portion de la surface limitée par le parallèle L de rayon C et contenant le point M_1. Elle coupe tous les parallèles de cette portion à l'exception du parallèle L. Si $C > r_0$, la géodésique est tangente au parallèle L; si $C = r_0$, la géodésique tend indéfiniment vers le parallèle L en s'enroulant une infinité de fois autour de la surface (fig. 194).

869. Soient r_0 et r_1 les rayons du plus petit et du plus grand parallèle. La constante C du théorème de Clairaut peut prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0, r_1]$. Tous les méridiens (pour $C = 0$),

le plus petit parallèle (pour $C = r_0$) et le plus grand parallèle (pour $C = r_1$) sont des géodésiques du tore. Si C n'est pas égale aux valeurs indiquées, la géodésique oscille entre deux parallèles de rayon C à la manière d'une sinusoïde. Il existe enfin sur le tore des géodésiques (pour $C = r_0$) qui s'enroulent une infinité de fois autour

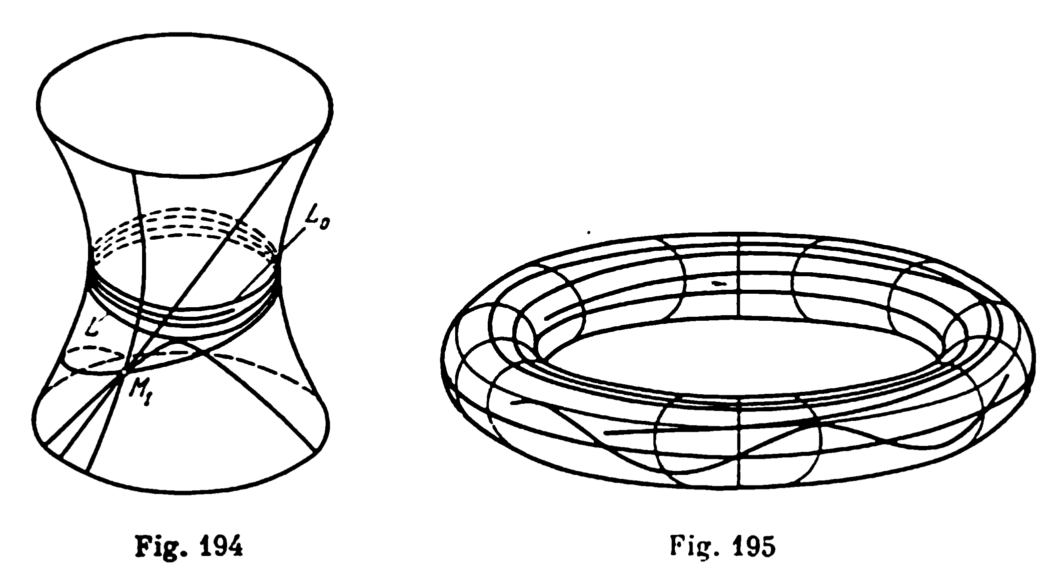


Fig. 194 Fig. 195

du tore en s'approchant indéfiniment du plus petit parallèle des deux côtés (fig. 195).

870. Indication. Utiliser un système semi-géodésique de coordonnées.

871. Les conditions d'orthonormalité du repère s'écrivent

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j. \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

En dérivant ces égalités et en utilisant les formules (2) § 18, on obtient

$$de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} \omega_i^k e_k \cdot e_j + \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k e_i \cdot e_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \delta_{kj} + \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k \delta_{ik} = 0,$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0.$$

872. M étant le rayon vecteur d'un point de la surface, dM appartient au plan tangent et par suite est une combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2.

873. La fonction vectorielle e_3 définit une application sphérique de la surface, donc $de_3(h) = \mathcal{A}(h)$, où $\mathcal{A}$ est l'opérateur principal. Pour le vecteur h de direction principale, on a $\mathcal{A}(h) = \lambda h$.

Si e_1 est tangent à la ligne de courbure γ, alors

$$de_3(e_1) = \omega_3^1(e_1)\, e_1 + \omega_3^2(e_1)\, e_2$$

sera colinéaire à e_1, c'est-à-dire que $\omega_3^2(e_1) = 0$ aux points de la ligne γ.

874. M étant le rayon vecteur d'un point de la surface, la fonction vectorielle M est l'application identique de la surface et $dM(h) = h$ pour tout vecteur tangent h. En particulier

$$dM(e_1) = \omega^1(e_1)\, e_1 + \omega^2(e_1)\, e_2 = e_1,$$
$$dM(e_2) = \omega^1(e_2)\, e_1 + \omega^2(e_2)\, e_2 = e_2.$$

875. Les vecteurs e_1, e_2 étant unitaires et $|\partial_u r| = \sqrt{E}$, $|\partial_v r| = \sqrt{G}$, on déduit de l'hypothèse de l'exercice que $\partial_u r = \sqrt{E} e_1$, $\partial_v r = \sqrt{G} e_2$. Par ailleurs

$$\omega^1 = f_1\, du + f_2\, dv, \quad f_1 = \omega^1(d_u r), \quad f_2 = \omega^2(d_u r),$$
$$\omega^1(\partial_u r) = \omega^1(\sqrt{E}\, e_1) = \sqrt{E}\, \omega^1(e_1) = \sqrt{E},$$
$$\omega^1(\partial_v r) = \omega^1(\sqrt{G}\, e_2) = \sqrt{G}\, \omega^1(e_2) = 0.$$

Donc, $\omega^1 = \sqrt{E}\, du$. Procéder de façon analogue pour la forme ω^2.

876. Pour les 1-formes ω^1 et ω^2 les expressions voulues ont été établies dans l'exercice 875. Pour la forme $\omega_1^3 = \lambda\, du + \mu\, dv$, il résulte de l'exercice 874 que $\mu = 0$. En posant $\lambda = p_1 \sqrt{E}$, on obtient $\omega_1^3 = p_1 \sqrt{E}\, du$. De façon analogue, $\omega_2^3 = p_2 \sqrt{G}\, dv$.

Pour la forme $\omega_1^2 = f\, du + g\, dv$, posons $f = q_1 \sqrt{E}$, $g = q_2 \sqrt{G}$.

877. Considérons un repère orthonormal

$$(M_0,\ e_1^0,\ e_2^0,\ e_3^0)$$

d'origine M. Si le système (4) § 18 est complètement intégrable, il existe alors une solution unique

$$M = M(u, v), \quad e_i = e_i(u, v),$$

vérifiant les conditions initiales

$$M(u_0, v_0) = M_0, \quad e_i(u_0, v_0) = e_i^0.$$

Géométriquement cela signifie qu'il existe une surface dont chaque point est lié au repère orthonormal (M, e_1, e_2, e_3).

878. Si les conditions (3) sont satisfaites, alors

$$d\omega_1^2 = (\partial_u (q_2 \sqrt{G}) - \partial_v (q_1 \sqrt{E}))\, du \wedge dv,$$
$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = -\, p_1 \sqrt{E}\, p_2 \sqrt{G}\, du \wedge dv;$$

donc les conditions (5) entraînent que $d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$. Procéder de façon analogue pour les autres formes et pour la réciproque.

881. La courbure normale de la ligne γ, définie par les équations intrinsèques $u = u(s)$, $v = v(s)$, est donnée par la formule:

$$k_n = \frac{\varphi_2(\gamma')}{\varphi_1(\gamma')} = \frac{p_1 E (u')^2 + p_2 G (v')^2}{E (u')^2 + G (v')^2}.$$

Si γ est la ligne de coordonnées $v = 0$, alors $v' = 0$ et $k_1 = p_1$. Procéder de façon analogue pour la deuxième ligne de coordonnées.

882. Le déplacement du point de rayon vecteur $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{e}_1$, qui appartient à la droite $M\boldsymbol{e}_1$, est égal à

$$d(\boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{e}_1) = (\sqrt{E}\, du + d\lambda)\, \boldsymbol{e}_1 + \\ + [\sqrt{G}\, dv + \lambda (q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv)]\, \boldsymbol{e}_2 + p_1 \sqrt{E}\, du \boldsymbol{e}_3.$$

Lorsque le point M se déplace sur la première ligne de coordonnées $u = \text{const}$, alors $\partial_v \boldsymbol{M} = \sqrt{G} \boldsymbol{e}_3$ et le point F se déplace sur l'arête de rebroussement, c'est-à-dire que le vecteur $\partial_v (\boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{e}_1)$ est colinéaire au vecteur $\boldsymbol{e}_1$, d'où

$$\partial_v (\boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{e}_1) = \partial_v \lambda \boldsymbol{e}_1, \quad 1 + \lambda q_2 = 0.$$

On obtient de façon analogue $1 - \lambda q_1 = 0$.

883. Soit $\boldsymbol{h}$ le vecteur unitaire d'une tangente à une courbe sur une surface. Alors

$$\boldsymbol{h} = \cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}} \partial_u \boldsymbol{r} + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}} \partial_v \boldsymbol{r},$$

$$k_n(\boldsymbol{h}) = \frac{\varphi_2(\boldsymbol{h})}{\varphi_1(\boldsymbol{h})} = \frac{p_1 E \dfrac{\cos^2\varphi}{E} + p_2 G \dfrac{\sin^2\varphi}{G}}{E \dfrac{\cos^2\varphi}{E} + G \dfrac{\sin^2\varphi}{G}} = p_1 \cos^2\varphi + p_2 \sin^2\varphi.$$

884. Rapportons le plan tangent à une surface en un point M à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $(M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ et désignons par x et y les coordonnées d'un point arbitraire. Si φ est l'angle que fait la première ligne de coordonnées avec une section normale arbitraire, alors de la définition de l'indicatrice de Dupin il s'ensuit que

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{|k_n|}}, \qquad y = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{|k_n|}}.$$

De la formule d'Euler

$$k_n = p_1 \cos^2\varphi + p_2 \sin^2\varphi$$

il vient

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = \pm 1.$$

885. Indication. La formule résulte des trois premières équations du système (5) § 18.

886. Lorsqu'on se déplace sur une ligne asymptotique

$$\boldsymbol{e}_3 d^2 \boldsymbol{M} = p_1 E\, du^2 + p_2 G\, dv = 0.$$

Donc, des équations (2) et (3) § 18 et de la formule $K = p_1p_2$ on déduit que

$$K\,dA^2 + de_3^2 = 0,$$

d'où

$$K + \left(\frac{de_3}{ds}\right)^2 = 0.$$

Comme le long de la ligne asymptotique le vecteur de la binormale b est confondu avec e_3, on a

$$\frac{de_3}{ds} = -\varkappa n.$$

Donc, $K + \varkappa^2 = 0$.

887. Les expressions indiquées se déduisent à partir des formules (2) et (3) § 18 et

$$k_g = \left(e_3 \frac{dM}{ds} \frac{d^2M}{ds^2}\right).$$

888. De l'exercice 878 on a $d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$, et d'après les formules (3) § 18

$$d\omega_1^2 = -p_1p_2 \sqrt{EG}\,du \wedge dv, \quad \omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG}\,du \wedge dv,$$

d'où

$$d\omega_1^2 = -k\omega^1 \wedge \omega^2.$$

889. Considérons sur la surface les vecteurs $a = a^\alpha e_\alpha$, $b = b^\alpha e_\alpha$. La translation de ces vecteurs sur la surface donne

$$da = a^\beta \omega_\beta^3 e_3, \quad ab = b^\beta \omega_\beta^3 e_3,$$

$$d(a \cdot b) = da \cdot b + a \cdot db = (a^\beta \omega_\beta^3 e_3)\, b^\alpha \cdot e_\alpha + a^\alpha e_\alpha \cdot (b^\beta \omega_\beta^3 e_3).$$

Comme $e_3 \cdot e_\alpha = 0$, il vient $d(a \cdot b) = 0$ et par suite le produit scalaire des vecteurs est préservé par une translation. Donc, la longueur et l'angle de ces vecteurs sont préservés aussi.

891. En dérivant la relation $\xi \cdot e_1 = \cos\varphi$, on trouve

$$-\sin\varphi\, d\varphi = d\xi \cdot e_1 + \xi \cdot de_1 = a^\alpha \omega_\alpha^3 e_3 \cdot e_1 + \xi \cdot de_1 = \xi \cdot de_1.$$

Si au lieu du vecteur ξ on considère des vecteurs translatables le long de la ligne donnée, les angles φ de ces vecteurs avec le vecteur ξ différeront l'un de l'autre d'une quantité constante, puisque la translation conserve les angles. Donc $d\varphi$ aura la même valeur quel que soit le vecteur translatable. En prenant le vecteur e_2 pour ξ, on obtient

$$-d\varphi = e_2 \cdot de_1 = \omega_1^2 = q_1 \sqrt{E}\,du + q_2 \sqrt{G}\,dv.$$

892. La formule (6) § 18 nous donne

$$\Delta\varphi = \oint_L -\left(q_1 \sqrt{E}\,du + q_2 \sqrt{G}\,dv\right).$$

La formule

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

et les conditions (5) § 18 entraînent

$$\Delta\varphi = \iint_D K\sqrt{EG}\,du\,dv.$$

Comme

$$K = p_1 p_2, \quad d\sigma = \sqrt{EG}\,du\,dv,$$

alors

$$\Delta\varphi = \iint_D K\,d\sigma.$$

893. Soient $\frac{dA}{ds}$ le vecteur unitaire de la tangente au contour L en A ; s la longueur d'arc de la ligne L ; $\boldsymbol{a}$ un vecteur unitaire sur la surface translatable le long du contour L. On a alors

$$\cos\psi = \boldsymbol{a}\cdot\frac{dA}{ds}, \quad d\boldsymbol{a} = a^{\alpha}\omega_{\alpha}^{3}e_3.$$

D'où

$$-\sin\psi\,d\psi = \boldsymbol{a}\cdot\frac{d^2A}{ds^2}\,ds.$$

Supposons qu'en un point A_0 du contour L

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{dA}{ds}\times e_3.$$

Alors

$$d\psi = \left(e_3\,\frac{dA}{ds}\,\frac{d^2A}{ds^2}\right) ds,$$

ou

$$d\psi = k_g\,ds.$$

Lorsque le point A fait un tour complet le long de la frontière L à partir de A_0, le vecteur $\frac{dA}{ds}$ pivote d'un angle de 2π ; l'angle de rotation du vecteur $\boldsymbol{a}$ par rapport au vecteur $\frac{dA}{ds}$ est égal à

$$\Delta\psi = \oint_L k_g\,ds.$$

Donc

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi.$$

896. De la formule

$$\iint\limits_D K\,d\sigma + \int\limits_L k_g\,ds = 2\pi$$

pour $k_g = 0$ il s'ensuit que

$$\iint\limits_D K\,d\sigma = 2\pi.$$

Cette égalité ne peut avoir lieu si en tous les points de la surface $K \leqslant 0$.

897. Sur le plan xOy, la région intérieure de l'ellipse

$$2x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x + 18y - 16 = 0, \quad z = 0;$$

sur le plan yOz, la région intérieure de l'ellipse

$$5y^2 + 8z^2 + 32y - 32z - 4 = 0, \quad x = 0;$$

sur le plan xOz, la région intérieure de l'ellipse

$$23x^2 + 54z^2 + 18x - 216z - 324 = 0, \quad y = 0.$$

900. Montrons que chacune des lignes asymptotiques considérées l est une droite. Supposons le contraire. Les normales à la surface le long de la ligne l sont parallèles à un plan fixe, donc $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e} = 0$, où $\boldsymbol{e}$ est un vecteur constant. Comme le vecteur de la binormale $\boldsymbol{b} = \pm\boldsymbol{m}$ sur une ligne asymptotique, on a $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} = 0$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\varkappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} = 0.$$

Or $\varkappa \neq 0$, sinon $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m}$ serait un vecteur constant et la ligne asymptotique se transformerait en un point par une application sphérique. Donc

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} = 0;$$

et par suite $\boldsymbol{t} = \pm\boldsymbol{e}$, d'où

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k\boldsymbol{n} = \mathbf{o} \quad \text{et} \quad k = 0$$

contrairement à l'hypothèse. Donc, la surface S est réglée. Elle ne peut être développable, puisque l'image d'une ligne asymptotique par une application sphérique serait un point.

901. Si l'on écrit les équations de la surface de révolution sous la forme

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = u,$$

alors, en annulant la courbure moyenne, on obtient

$$1 + \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0.$$

Effectuons un changement de variables en prenant $p = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ pour nouvelle fonction et φ pour nouvelle variable. On a alors

$$1+p^2-\varphi p\frac{dp}{d\varphi}=0, \qquad \frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{1}{2}d(\ln(1+p^2)),$$

d'où

$$c^2\varphi^2 = 1 + p^2.$$

En revenant aux anciennes variables, on obtient

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2\varphi^2-1}}=du,$$

$$(1 + u^2) f'(u) = a, \quad f'(u) = a/(1 + u^2).$$

L'intégration de cette équation nous donne

$$f(u) + b = z + b = a \operatorname{arctg} u.$$

Donc,

$$u=\operatorname{tg}\frac{z+b}{a}, \qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z+b}{a}.$$

On reconnaît l'équation implicite de l'hélicoïde normal

$$x=\tilde{u}\cos\tilde{v}, \quad y=\tilde{u}\sin\tilde{v}, \quad z=a\tilde{v}-b.$$

904. Les coefficients de la première et de la deuxième forme quadratique des surfaces S et S^* sont liés par les relations:

$$\begin{aligned}
E^* &= (1 - a^2K) E + 2a(aH - 1) L,\\
F^* &= (1 - a^2K) F + 2a(aH - 1) M,\\
G^* &= (1 - a^2K) G + 2a(aH - 1) N,\\
L^* &= aKE + (1 - 2aH) L,\\
M^* &= aKF + (1 - 2aH) M,\\
N^* &= aKG + (1 - 2aH) N.
\end{aligned}$$

D'où les expressions cherchées:

$$K^*=\frac{K}{1-2aH+a^2K}, \qquad H^*=\frac{H-aK}{1-2aH+a^2K}.$$

905. En portant $a = 1/2H$ dans la formule

$$K^*=\frac{K}{1-2aH+a^2K},$$

on obtient

$$K^* = 4H^2 = \text{const.}$$

906. Supposons que sur la surface S les lignes de coordonnées sont confondues avec les lignes de courbure. En utilisant l'opérateur principal on obtient

$$r_u^* = (1 - ak_1) r_u, \quad r_v^* = (1 - ak_2) r_v.$$

Donc, les coefficients des premières formes quadratiques des surfaces S et S^* sont reliés par les relations

$$E^* = (1 - ak_1)^2 E, \quad G^* = (1 - ak_2)^2 G, \quad F^* = F = 0.$$

D'où

$$d\sigma^* = (1 - ak_1)(1 - ak_2)\, d\sigma$$

et

$$\lim_{a\to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\, d\sigma} = \lim_{a\to 0} \left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{1}{2} ak_1k_2\right) = \frac{k_1+k_2}{2} = H.$$

907. Soient S la surface minimale, S^* une surface parallèle à S située à une distance a suivant la normale. De l'exercice **906** il s'ensuit que les éléments homologues des surfaces S et S^* sont reliés par la relation

$$d\sigma^* = (1 + a^2K)\, d\sigma,$$

où K est la courbure totale de la surface S. Donc

$$\iint_D d\sigma^* = \iint_D d\sigma + a^2 \iint_D K\, d\sigma.$$

Comme $K \leqslant 0$ pour la surface minimale, il vient

$$\iint_D d\sigma^* \leqslant \iint_D d\sigma.$$

910. Pour que les droites admettent une enveloppe (c'est-à-dire forment une développable), il faut poser

$$p = c \pm \frac{t^2}{2}, \quad c = \text{const.}$$

L'équation de la figure formée par les arêtes de rebroussement est

$$9\,(xz - y)^2 - 4z^6 = 0.$$

Equations des arêtes de rebroussement

$$x = c \pm \frac{t^2}{2}, \quad y = -\frac{t^3}{6} \mp ct, \quad z = \mp t.$$

Equation de la ligne d'intersection avec le plan xOy:

$$8\,(x - c)^3 - 9y^2 = 0.$$

911. Prenons l'axe du cylindre pour axe Oz et disposons l'axe Ox dans le plan sécant. Les équations du cylindre s'écrivent alors

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = u,$$

celle du plan sécant,

$$z = Ay.$$

Découpons le cylindre suivant une génératrice rencontrant l'axe Ox et développons-le sur le plan xOz. Vu que l'abscisse sera maintenant la longueur d'arc $s = at$ de la section normale au cylindre,

l'équation de la ligne cherchée sera

$$z = aA \sin (s/a)$$

c'est-à-dire est une sinusoïde.

912. Supposons que le plan δ passant par la droite d coupe la sphère suivant un cercle γ. Considérons le cône circulaire tangent à la sphère suivant γ. Ses génératrices sont tangentes aux trajectoires orthogonales au cercle. Mais les sommets de tels cônes sont situés sur la droite d', polaire de d. Donc, les sections de la sphère par le faisceau de plans passant par d' seront les trajectoires orthogonales.

913. L'équation générale du mouvement d'un point sur une surface est

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} + R\boldsymbol{m} - \mu \mid R \mid \boldsymbol{t},$$

où $\boldsymbol{F}$ est la force extérieure, R la réaction normale de la surface, μ le coefficient de frottement, $\boldsymbol{t}$ le vecteur unitaire de la tangente à la surface, $\boldsymbol{m}$ le vecteur unitaire de la normale à la surface. Comme

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\boldsymbol{t}}{ds},$$

pour $\boldsymbol{F} = 0$ l'équation du mouvement est

$$m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{t} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right) = R\boldsymbol{m} - \mu \mid R \mid \boldsymbol{t}.$$

En la multipliant scalairement par $\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{m}$, on obtient

$$\boldsymbol{tm}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\boldsymbol{m}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0,$$

c'est-à-dire que le point se déplace sur une géodésique (voir exercice 843).

914. $X = F_x\Phi$, $Y = F_y\Phi$, $Z = F_z\Phi$, où

$$\Phi = \frac{xF_x + yF_y + zF_z}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

et le point $M(x, y, z)$ satisfait l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

915. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + \varepsilon b^2y^2 + \varepsilon' c^2z^2$.

916. $2z(x^2 + y^2 + z^2) = ax^2 + by^2$.

917. $z(x^2 + y^2 + z^2) + axy = 0$.

919. C'est une développable.

920. Les développables seulement.

922. Prenons une des familles de géodésiques pour lignes de coordonnées u d'un système semi-géodésique de coordonnées. Alors

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2.$$

Si φ est l'angle des lignes de coordonnées u et des lignes géodésiques de la deuxième famille, alors

$$\cos \varphi = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G\,dv^2}}.$$

L'angle φ étant constant, il vient

$$\frac{du}{dv} = a\sqrt{G}, \quad \text{où} \quad a = \text{const}.$$

En portant ceci dans l'équation différentielle des lignes géodésiques, on obtient $G_u = 0$; donc, $G = G(v)$ et la première forme quadratique se réduit à

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Réciproquement, soit S une développable. Comme S se développe sur un plan, les géodésiques se transformant en géodésiques et les angles des lignes restant invariants, il suffit de remarquer que les familles de géodésiques indiquées existent sur le plan.

923. La génératrice de la surface conique qui contient le point de la géodésique est située dans le plan rectifiant de cette ligne. Donc, la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan osculateur coupe le plan tangent. Sa longueur est

$$d = p \sin \alpha$$

où p est un segment de génératrice, α l'angle de cette dernière et de la tangente. Le développement d'une ligne géodésique de la surface conique sur un plan est une droite le long de laquelle la distance d est constante. Mais p et α ont les mêmes valeurs que sur le cône, donc, $p \sin \alpha = d$ est constant aussi sur le cône.

Pour prouver la réciproque, il suffit de montrer que le développement des lignes jouissant de la propriété indiquée est une droite.

924. Considérons un système semi-géodésique de coordonnées sur la surface. Alors

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

Sur la ligne $u = 0$, on a $\sqrt{G}\,|_{u=0} = 1$. L'équation des géodésiques nous donne en outre $\left.\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right|_{u=0} = 0$. Dans le système de coordonnées choisi

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

(voir exercice 749).

1) Si $K = 0$, alors

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} = 0,$$

et la solution vérifiant les conditions initiales indiquées ci-dessus est $\sqrt{G} = 1$. Donc, la première forme quadratique des surfaces de courbure totale nulle se réduit à

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

donc elles sont applicables l'une sur l'autre.

2) Si $K = \frac{1}{a^2}$ ($a = \text{const}$), alors

$$\sqrt{G} = \cos(u/a) \quad \text{et} \quad ds^2 = du^2 + \cos^2(u/a)\,dv^2.$$

3) Si $K = -1/a^2$ ($a = \text{const}$), alors

$$ds^2 = du^2 + \text{ch}^2(u/a)\,dv^2.$$

933. Le plan tangent en M à une surface S admet pour vecteurs directeurs les vecteurs $d_u\boldsymbol{r}$ et $\partial_v\boldsymbol{r}$, où $(U, \boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de S. $\mathcal{A}$ étant une application affine, $(U, \mathcal{A}\circ\boldsymbol{r})$ est une représentation paramétrique de la surface $\mathcal{A}(S) = S'$. Les vecteurs directeurs du plan tangent en $\mathcal{A}(M) = M'$ à S' seront les vecteurs $\partial_u(\mathcal{A}\circ\boldsymbol{r})$ et $\partial_v(\mathcal{A}\circ\boldsymbol{r})$. Or $\partial_u(\mathcal{A}\circ\boldsymbol{r}) = \mathcal{A}(\partial_u\boldsymbol{r})$, $\partial_v(\mathcal{A}\circ\boldsymbol{r}) = \mathcal{A}(\partial_v\boldsymbol{r})$. Donc l'image du plan tangent à S en M par $\mathcal{A}$ est le plan tangent en M' à S'.

939. Notion affine.

940. Notion métrique, car l'image d'un cercle, par exemple, par une application affine est une ellipse.

941-946. Notions métriques.

947-948. Notions affines. **949-952.** Notions métriques.

953. Notion affine.

954. Notion métrique, car, par exemple, la courbure de l'une des sections normales principales (un cercle du plan xOy) de l'image de la caténoïde

$$x = a\,\text{ch}(u/a)\cos v, \quad y = a\,\text{ch}(u/a)\sin v, \quad z = u$$

par l'application affine

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = kz$$

ne varie pas, tandis que celle de la deuxième section (un méridien de la caténoïde) varie. En définitive, la courbure moyenne varie.

955. Notion affine, car on définit le type d'un point par le nombre de directions asymptotiques en ce point.

956. Notion métrique.

957. Notion affine.

958. Utilisons le caractère affine de l'exercice. Transformons l'ellipse en le cercle

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

par l'application affine

$$x' = \frac{1}{a}x, \quad y' = \frac{1}{b}y.$$

Alors les diamètres conjugués se transforment en des diamètres orthogonaux et le cercle

$$x'^2 + y'^2 = 1/2$$

sera l'enveloppe des images des cordes de l'ellipse. Donc, l'enveloppe

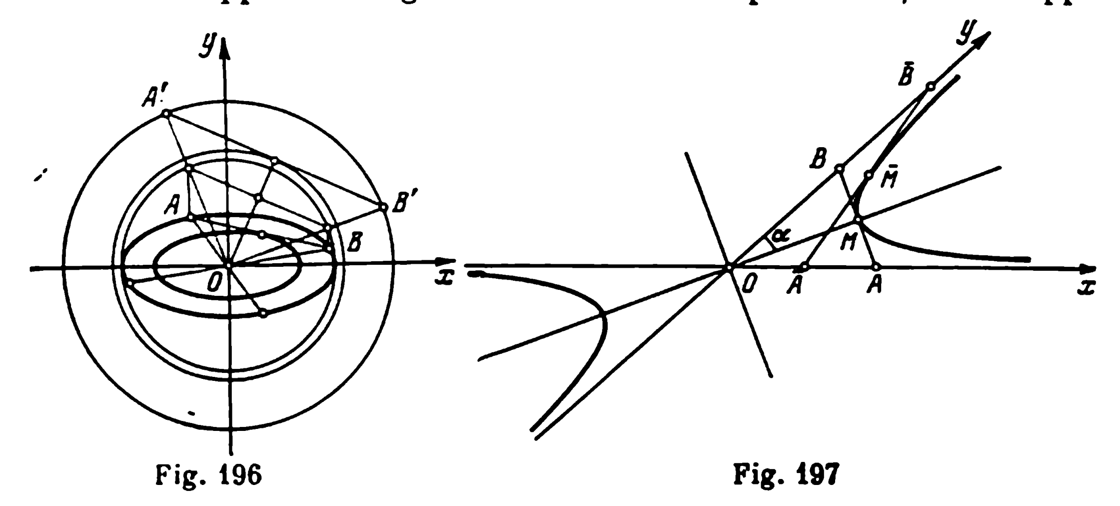


Fig. 196 Fig. 197

cherchée est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

(fig. 196).

959. Utilisons le caractère affine de l'exercice. Transformons l'ellipse en le cercle

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

par l'application affine

$$x' = x/a, \quad y' = y/b$$

et utilisons la formule $S' = S\Delta$, Δ est le déterminant de l'application affine. Dans notre cas $\Delta = 1/ab$ et $S' = S/ab$. L'enveloppe des images des droites est le cercle de rayon $R' = \cos S'$:

$$x'^2 + y'^2 = R'^2.$$

Donc, l'équation cherchée est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \frac{S}{ab}.$$

C'est une ellipse semblable à l'ellipse donnée dans le rapport $\cos (S/ab)$.

960. Prenons les droites données pour axes du système de coordonnées affine et pour vecteurs d'échelle les vecteurs unitaires (fig. 197). Soit AB une droite de la famille orthogonale à l'une des

bissectrices des angles de coordonnées. Considérons l'hyperbole tangente à AB en M (a, a) et admettant pour asymptotes les axes de coordonnées. Son équation est $xy = c$. Exprimons c en fonction de S:

$$OA = OB = 2a, \quad S = 2a^2 \sin 2\alpha.$$

Le point M appartenant à l'hyperbole, on a $a^2 = c$ et

$$c = \frac{S}{2 \sin 2\alpha}.$$

Donc, l'équation de l'hyperbole est

$$xy = \frac{S}{2 \sin 2\alpha}. \qquad (*)$$

Effectuons maintenant une rotation hyperbolique qui envoie l'hyperbole (*) dans elle-même et le point M dans un point $\tilde{M}$. On sait que par cette rotation la corde AB se transforme en une tangente à l'hyperbole en $\tilde{M}$ qui découpe sur les axes de coordonnées un triangle de même surface S, c'est-à-dire se transforme en une droite quelconque de la famille donnée.

Donc, l'hyperbole (*) est l'enveloppe de la famille de droites qui découpent des triangles de surface S sur le premier et le troisième quadrant. De façon analogue, l'hyperbole conjuguée

$$xy = -\frac{S}{2 \sin 2\alpha}$$

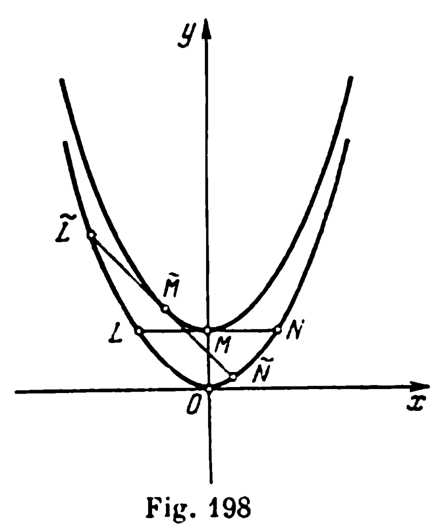


Fig. 198

est l'enveloppe de la famille de droites qui forment avec le deuxième et le quatrième quadrant des triangles de surface S.

961. Considérons la droite LN de la famille, orthogonale à l'axe Oy en M $(0, b)$. Exprimons b en fonction de S:

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b/a}} ax^2\, dx,$$

d'où

$$b = \left(\frac{9aS^2}{4}\right)^{1/3}.$$

Construisons la parabole déduite de $y = ax^2$ par une translation de vecteur b le long de l'axe Oy (fig. 198). Son équation est:

$$y = ax^2 + \left(\frac{9aS^2}{4}\right)^{1/3}. \qquad (*)$$

Effectuons maintenant une rotation parabolique qui envoie la parabole (*) dans elle-même et le point M dans un point quelconque $\tilde{M}$. La parabole $y = ax^2$ reste invariante par cette rotation et la corde LN se transforme en une tangente en $\tilde{M}$ à la parabole (*), c'est-à-dire en une droite arbitraire de la famille donnée. Dons, la parabole (*) est l'enveloppe cherchée

962. Soit

$$\rho = r(u) + ve(u)$$

l'équation d'une surface réglée gauche. Sa deuxième forme quadratique s'écrit

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv,$$

où

$$L = \frac{v^2(e'ee'') + v(e'er'' + r'ee'') + r'er''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \frac{r'ee'}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

La condition

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv = 0$$

nous dit que la direction asymptotique, distincte de la direction de la génératrice rectiligne, est définie par le vecteur

$$\rho_u + \rho_v \frac{dv}{du} = r' + ve' - \frac{L}{2M} e$$

($M \neq 0$ par hypothèse).

L'équation de la surface engendrée par les tangentes aux lignes asymptotiques le long de la génératrice correspondant à $u = u_0$ s'écrit

$$R = r_0 + ve_0 + w\left(r_0' + ve_0' - \frac{L_0}{2M_0} e_0\right). \qquad (*)$$

Prenons un système de coordonnées affine d'origine le point A_0, de rayon vecteur r_0 et de vecteurs unitaires r_0', e_0, e_0'. Posons

$$\frac{e_0'e_0e_0''}{r_0'e_0e_0'} = a, \qquad \frac{e_0'e_0r_0'' + r_0'e_0e_0''}{r_0'e_0e_0'} = b, \qquad \frac{r_0'e_0r_0''}{r_0'e_0e_0'} = c$$

(a, b, c sont des constantes). Les équations de la surface (*) s'écrivent alors

$$\begin{cases} x_1 = w, \\ x_2 = v - \frac{w}{2}(av^2 + bv + c), \\ x_3 = vw. \end{cases}$$

D'où

$$x_1x_2 = x_3 - \frac{a}{2}x_3^2 - \frac{b}{2}x_1x_3 - \frac{c}{2}x_1^2.$$

Dans les coordonnées

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1, \\ \tilde{x}_2 = \frac{c}{2} x_1 + x_2 + \frac{b}{2} x_3, \\ \tilde{x}_3 = x_3, \end{cases}$$

l'équation de la surface s'écrit

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \frac{a}{2} \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_3 = 0.$$

Si $a \neq 0$, on obtient un hyperboloïde à une nappe; si $a = 0$, un paraboloïde hyperbolique (la condition $a = 0$ signifie que la surface

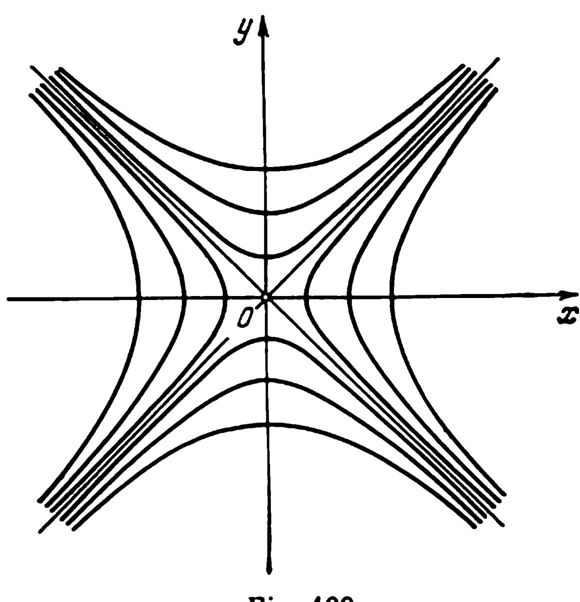


Fig. 199

initiale est composée de droites parallèles à un plan).

963. Les cercles concentriques $x^2 + y^2 = C$ et le point O (0, 0).

964. Les hyperboles équilatères coasymptotiques $x^2 - y^2 = C$ et leurs asymptotes (fig. 199).

965. Les paraboles $y = Cx^2$ et la droite $y = 0$.

966. Les cercles $C(x^2 + y^2) = 2x$ et une droite (fig. 200).

967. Les paraboles $Cx^2 = 2x - y + 1$ d'axes parallèles à Oy, passant par le point (0, 1) et tangentes en ce point à la droite $2x - y + 1 = 0$, et cette droite (fig. 201).

968. Les plans parallèles $x + y + z = C$.

969. Les sphères concentriques $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

970. Les hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes $x^2 + y^2 - z^2 = C$ de cône asymptotique commun et ce cône (fig. 202).

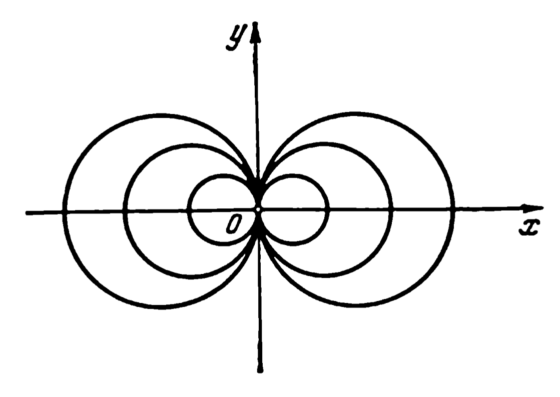


Fig. 200

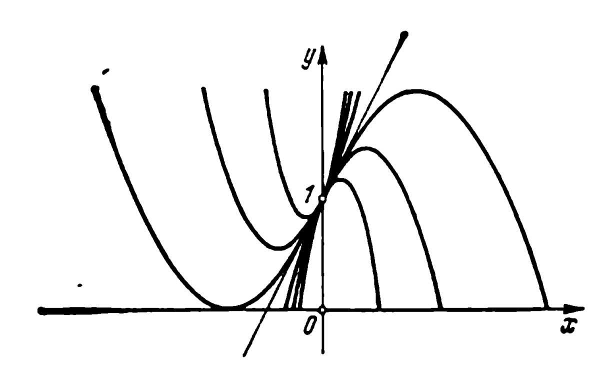


Fig. 201

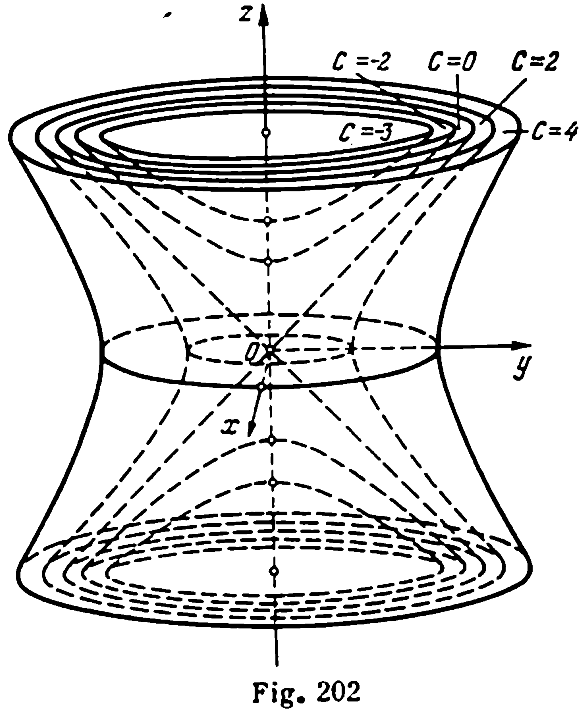


Fig. 202

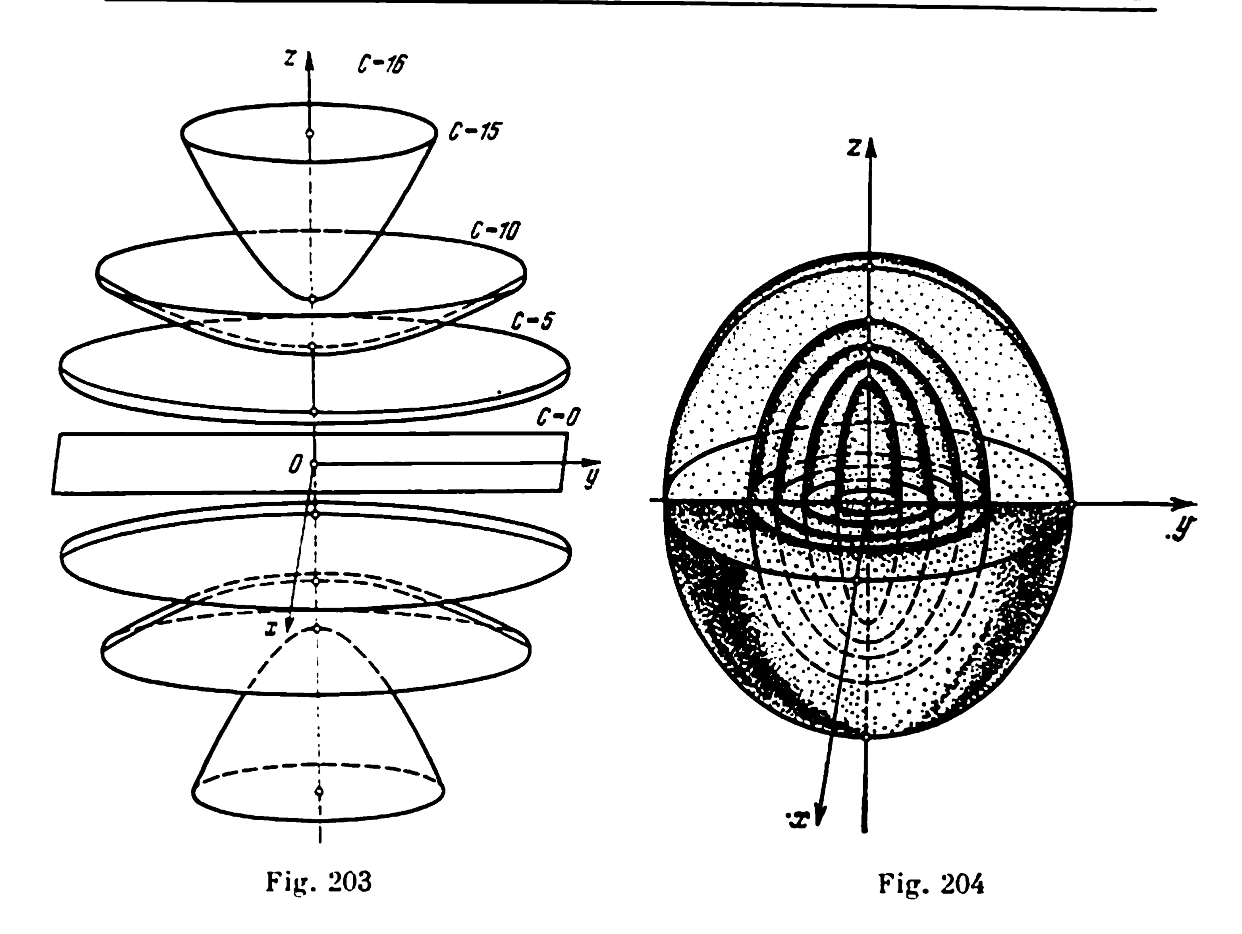


Fig. 203

Fig. 204

971. $-4C^2(x^2+y^2)+4(256-C^2)z^2=C^2(256-C^2)$ $(C \geqslant 0)$. Pour $C=0$, on obtient un plan; pour $0<C<16$, des hyperboloïdes à deux nappes d'axe de révolution Oz (fig. 203); pour $C=16$, l'axe Oz; pour $C>16$, des ellipsoïdes de révolution d'axe Oz (fig. 204).

972. 1. **973.** 5. **974.** (0, 0), (1, 1). **975.** $N(7, 2, 1)$.

976. $(2x-y-z)\,\boldsymbol{i}+(4y+z-x)\,\boldsymbol{j}+(6z-x+y)\,\boldsymbol{k}$.

977. $3(x^2-ayz)\,\boldsymbol{i}+3(y^2-axz)\,\boldsymbol{j}+3(z^2-ayx)\,\boldsymbol{k}$.

978. $e^{x+y+z}\,[yz(x+1)\,\boldsymbol{i}+xz(y+1)\,\boldsymbol{j}+xy(z+1)\,\boldsymbol{k}]$.

979. $\frac{1}{1+x^2}\,\boldsymbol{i}+\frac{1}{1+y^2}\,\boldsymbol{j}+\frac{1}{1+z^2}\,\boldsymbol{k}$.

980. $9\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$.

981. $|\operatorname{grad} u|=6$; $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/3$, $\cos\gamma=1/3$.

982. $\operatorname{grad} u(O)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$, $|\operatorname{grad} u(O)|=7$,

$$\cos\alpha=3/7,\ \cos\beta=-2/7,\ \cos\gamma=-6/7;$$

$$\operatorname{grad} u(A)=7\boldsymbol{i},\ |\operatorname{grad} u(A)|=7,$$

$$\cos\alpha=1,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=0;\ \operatorname{grad} u=\mathbf{o}$$

en $N(-2, 1, 1)$.

983. $\cos\varphi = 3/\sqrt{10}$.

984. $\cos\varphi = -8/2025$. **985.** $\pi/2$. **986.** Croît; 12.

987. M_1 (4/5, —1/4), M_2 (—4/5, 9/4).

988. $2u/r$, où $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; si $a=b=c$.

989. $\dfrac{\text{grad}\, u\cdot\text{grad}\, v}{|\text{grad}\, v|}$; si grad $u \perp$ grad v.

997. Comme $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, alors

$$\text{grad}\, r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

998. $f'(r)\boldsymbol{r}/r$. **999.** $nr^{n-2}\boldsymbol{r}$. **1000.** $-\boldsymbol{r}/r^3$. **1001.** $\boldsymbol{r}/r^2$.

1002. Soit $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$. Alors $u=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}=c_1x+c_2y+c_3z$, d'où $\dfrac{\partial u}{\partial x}=c_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=c_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=c_3$. Donc grad $u=\text{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$.

1003. $\dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})^2}$.

1004. $2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})-2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})$.

1008. Soient $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ les vecteurs unitaires du repère mobile. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$ sont situés dans le plan tangent à la surface de coordonnées w = const; donc le vecteur $\boldsymbol{e}_w$ est orthogonal à cette surface et par suite est colinéaire au gradient du scalaire w, c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{e}_w=k_3\,\text{grad}\, w, \qquad (*)$$

où k_3 est un facteur quelconque. Considérons la ligne $u=u(s)$, $v=v(s)$, $w=w(s)$. En dérivant le rayon vecteur

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,[u(s),\ v(s),\ w(s)]$$

d'un point arbitraire de cette ligne, on obtient

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}+\boldsymbol{r}_w\frac{dw}{ds}.$$

Multiplions cette égalité scalairement par grad w:

$$\frac{dw}{ds}=\frac{dw}{ds}\boldsymbol{r}_w\cdot\text{grad}\, w,$$

d'où $\boldsymbol{r}_w\cdot$grad $w=1$. En remarquant que $\boldsymbol{r}_w=|\boldsymbol{r}_w|\,\boldsymbol{e}_w$ et en multipliant (*) scalairement par $\boldsymbol{r}_w$, on obtient $|\boldsymbol{r}_w|=k_3$. De la même égalité (*) on déduit que $1=k_3\,|\text{grad}\, w|$. Les mêmes raisonnements appliqués aux surfaces de coordonnées u = const et v = const nous donnent

$$\text{grad}\, f(u,\ v,\ w)=\frac{\boldsymbol{e}_u}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\boldsymbol{e}_v}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\boldsymbol{e}_w}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w},$$

où

$$k_1 = |r_u| = 1/|\text{grad } u|,$$

$$k_2 = |r_v| = 1/|\text{grad } v|, \quad k_3 = |r_w| = 1/|\text{grad } w|.$$

1009. $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$. **1010.** $\varphi e_r + e_\varphi + e_z$.

1011. $z\varphi e_r + z e_\varphi + r\varphi e_z$. **1012.** $e_r + \frac{z \cos \varphi}{r} e_\varphi + \sin \varphi e_z$.

1013. $2re_r - \frac{z \sin \varphi}{r} e_\varphi + \cos \varphi e_z$.

1014. $3r^2 e_r + \frac{z \sin 2\varphi}{r} e_\varphi + \sin^2 \varphi e_z$.

1015. $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi$.

1016. $\varphi e_\rho + \frac{1}{\sin \theta} e_\varphi$. **1017.** $\theta e_\rho + e_\theta$.

1018. $\theta\varphi e_\rho + \varphi e_\theta + \frac{\theta}{\sin \theta} e_\varphi$. **1019.** $e_\rho + \frac{\varphi \cos \theta}{\rho} e_\theta + \frac{1}{\rho} e_\varphi$.

1020. $e_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} e_\theta - \frac{\theta}{\rho} e_\varphi$.

1021. $x^2 + y^2 = C_1^2$, $z = C_2$. **1022.** $y = C_1 x$, $z = C_2 x^2$.

1023. $y - x = C_1 xy$, $x - z = C_2 xz$.

1024. $x^2 - y^2 = C_1'$, $z = C_2 x^2$.

1025. $x = C_1 y$, $x = C_2 z$. **1026.** $yz + 3 + 2z$.

1027. $12xy^2 + 4x^3 - 6xz$. **1033.** 3.

1034. $\text{div}\,(f(r)\,\boldsymbol{r}) = f(r)\,\text{div}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \cdot \text{grad}\, f(r)$. Comme $\text{div}\,\boldsymbol{r} = 3$, $\text{grad}\, f(r) = f'(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, on a

$$\text{div}\,(f(r)\,\boldsymbol{r}) = 3f(r) + rf'(r).$$

1035. $2/r$. **1036.** $(n + s)\, r^n$.

1037. $\text{div}\,(\text{grad}\, f(r)) = \text{div}\left(\frac{f'(r)}{r} \boldsymbol{r}\right) = \frac{f'(r)}{r} \text{div}\,\boldsymbol{r} +$

$$+ \boldsymbol{r} \cdot \text{grad}\, \frac{f'(r)}{r} = \frac{3f'(r)}{r} + \boldsymbol{r} \cdot \frac{r \,\text{grad}\, f'(r) - f'(r)\, \text{grad}\, r}{r^2} =$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \boldsymbol{r} \frac{rf''(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r} - f'(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}}{r^2} =$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \boldsymbol{r} \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

1038. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

1039. $u\,\Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$. 1040. $u\,\Delta u + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v$.

1041. $\frac{c\cdot r}{r}$. 1042. $2c\cdot r$. 1043. $f'(r)\,\frac{c\cdot r}{r}$.

1044. 0. 1045. $c\cdot c_1$. 1046. $4c\cdot c_1$. 1047. 1.

1048. 2. 1049. $\frac{x+y+z}{xyz}$.

1050. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$. La solution générale de cette équation est $f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$.

1051. Comme $\operatorname{div} \frac{r}{r} = \frac{2}{r}$ et $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, il vient par hypothèse $2rf''(r) + 4f'(r) = \frac{2}{r}$, d'où $f(r) = \ln r + \frac{c_1}{r} + c_2$.

1052. $\operatorname{div} a = \frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$, où a_u, a_v, a_w sont les projections du vecteur a sur les tangentes aux lignes de coordonnées correspondantes,

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

Les quantités L, M et N sont appelées *coefficients de Lamé*.

1053. $\operatorname{div} a = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$.

1054. $\operatorname{div} a = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(a_\rho \rho^2 \sin\theta) + \rho\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + \rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$.

1055. $(x^2 - 2xz)\,i + (y^2 - 2xy)\,j + (z^2 - 2yz)\,k$.

1056. $i + (xy - 2x)\,j + (2 - xz)\,k$.

1060. o. 1061. o. 1062. $-2c$. 1063. $c \times r$.

1064, 1065. $c_1 \times c$. 1066. o. 1067. $\frac{f'(r)}{r}(r \times c)$.

1073. Utilisons la formule d'Ostrogradski $\Pi = \iint_S a_n\,d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} a\,dw$ pour calculer le flux. Comme $\operatorname{div} a = y^2 + x^2 + 1$, il vient

$$\Pi = \iiint_V (x^2+y^2+1)\,dx\,dy\,dz = \iint_D (x^2+y^2+1)\,dx\,dy \int_0^{4-x^2-y^2} dz =$$
$$= \iint_D (x^2+y^2+1)(4-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Passons aux coordonnées polaires

$$\Pi = \iint_D (r^2+1)(4-r^2)\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (-r^5+3r^3+4r)\,dr = \frac{14\pi}{3}.$$

1074. $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3(x^2+y^2+z^2)$. D'après la formule d'Ostrogradski

$$\Pi = \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dw = 3\cdot 8 \iiint_{V_1} (x^2+y^2+z^2)\,dw,$$

où V_1 est la portion de boule comprise dans le premier octant. Passons aux coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta,$$
$$dw = \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta, \quad x^2+y^2+z^2 = \rho^2,$$
$$\Pi = 24 \iiint_{V_1} \rho^4 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 24 \int_0^R \rho^4\,d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi = 2{,}4\pi R^5.$$

1075. $4\pi q$. **1076.** 0. **1077.** 10/3.

1078. a) $\frac{1}{10}\pi R^2 H(3R^2+2H^2)$;

b) $\frac{3}{10}\pi R^2 H(R^2+2H^2)$.

1080. Sur le cercle $\boldsymbol{a} = R^3\cos^3 t\,\boldsymbol{i} - R^3 \sin^3 t\,\boldsymbol{j}$, $d\boldsymbol{r} = -R\sin t\,dt\,\boldsymbol{i} + R\cos t\,dt\,\boldsymbol{j}$. Donc, $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}R^4 \sin 2t\,dt$. Lorsque le point courant se déplace sur un arc de cercle L dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, le paramètre t varie entre 0 et $\pi/2$. Donc, l'intégrale linéaire le long de L est égale à

$$A = \int_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} R^4 \sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}R^4.$$

1081. $2\pi^2 b^2$.

1082. La ligne L est composée de deux segments BO (sur l'axe Oy) et OA (sur l'axe Ox) et de l'arc AB de l'astroïde. Il faut contourner L dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Donc, la circulation du vecteur sera égale à

$$\oint_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{AB} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{BO} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{OA} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Calculons chaque intégrale du membre de droite séparément. Sur l'astroïde

$$\boldsymbol{a} = R \sin^3 t\boldsymbol{i} - R \cos^3 t\boldsymbol{j},$$

$$d\boldsymbol{r} = -3R \cos^2 t \sin t \, dt \, \boldsymbol{i} + 3R \sin^2 t \cos t \, dt \, \boldsymbol{j}.$$

Donc $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{3}{4} R^2 \sin^2 2t \, dt$. Lorsque le point courant se déplace sur l'arc AB de A vers B, le paramètre t varie entre 0 et $\pi/2$. On aura

$$\int_{AB} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{3}{4} R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt = -\frac{3}{16} \pi R^2.$$

Sur l'intervalle OA on a $\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{j}$, $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$. Donc, $\int_{OA} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$. De façon analogue, $\int_{BO} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$. Donc, la circulation cherchée est égale à $-3/16\pi R^2$.

1083. 0.

1084. $-\pi b^2$.

1085. a) 2π ; b) 2π.

1086. $-\pi R^6/8$. **1087.** N'existe pas.

1088. $\text{rot}\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, donc le champ $\boldsymbol{a}$ est potentiel et son potentiel u est défini à partir de l'équation

$$du = (y + z) \, dx + (x + z) \, dy + (x + y) \, dz.$$

Cette équation équivaut au système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y + z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = x + y. \end{cases}$$

De la première équation du système il s'ensuit que $u = (y + z) x + \varphi(y, z)$. En portant ceci dans la deuxième, on obtient $\partial\varphi(y, z)/\partial y = z$, d'où $\varphi(y, z) = zy + \psi(z)$. En portant $u = xy + xz + zy + \psi(z)$ dans la troisième équation, on obtient $\psi'(z) = 0$, c'est-à-dire que $\psi(z) = C = \text{const}$. Donc, $u = xy + yz + zx + C$.

1089. $u = xyz(x + y + z) + C$.

1090. Oui.

INDEX

